260 HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC ĐỀ THI

1/ Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

Giải: Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}>0$. (2) $\Leftrightarrow$ $x=3$

2/ Giải bất phương trình: $\dfrac{2^{1-x}-2^x+1}{2^x-1}\ge 0$

Giải: $0<x\le 1$

3/ Giải phương trình: $\dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\dfrac{1}{4}\log_4(x-1)^8=3\log_8(4x)$.

Giải: (1) $\Leftrightarrow$ $(x+3)|x-1|=4x$ $\Leftrightarrow$ x = 3; x = $-3+2\sqrt{3}$

4/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm x $\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$:

$$m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0 \qquad (2)$$

Giải: Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2}$. (2) $\Leftrightarrow$ $m\le\dfrac{t^2-2}{t+1}$ $(1\le t\le 2)$, do $x\in[0;1+\sqrt{3}]$

Khảo sát $g(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $1\le t\le 2$. $g'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0$. Vậy g tăng trên [1,2]

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ bpt $m\le\dfrac{t^2-2}{t+1}$ có nghiệm $t\in[1,2]$ $\Leftrightarrow$ $m\le\max\limits_{t\in[1;2]}g(t)=g(2)=\dfrac{2}{3}$

5/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^4-4x^2+y^2-6y+9=0\\ x^2y+x^2+2y-22=0\end{cases}$ (2)

Giải: (2) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}(x^2-2)^2+(y-3)^2=4\\ (x^2-2+4)(y-3+3)+x^2-2-20=0\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}x^2-2=u\\ y-3=v\end{cases}$

Khi đó (2) $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}u^2+v^2=4\\ u.v+4(u+v)=8\end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases}u=2\\ v=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=0\\ v=2\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}; \begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}; \begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=5\end{cases}; \begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=5\end{cases}$

6/ 1) Giải phương trình: $5.3^{2x-1}-7.3^{x-1}+\sqrt{1-6.3^x+9^{x+1}}=0$ (1)

2) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hệ phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (a) \\ \log_2(x^2-2x+5) - m\log_{(x^2-2x+5)} 2 = 5 & (b) \end{cases}$$

Giải: 1) Đặt $t = 3^x > 0$. (1) $\Leftrightarrow$ $5t^2 - 7t + 3|3t-1| = 0 \Rightarrow x = \log_3 \frac{3}{5};\ x = -\log_3 5$

2) $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x+1) - \log_{\sqrt{3}}(x-1) > \log_3 4 & (a) \\ \log_2(x^2-2x+5) - m\log_{(x^2-2x+5)} 2 = 5 & (b) \end{cases}$

- Giải (a) $\Leftrightarrow 1 < x < 3$.
- Xét (b): Đặt $t = \log_2(x^2-2x+5)$. Từ $x \in (1; 3) \Rightarrow t \in (2; 3)$.

(b) $\Leftrightarrow t^2 - 5t = m$. Xét hàm $f(t) = t^2 - 5t$, từ BBT $\Rightarrow m \in \left(-\frac{25}{4}; -6\right)$

7/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 18y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$

Giải: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\frac{3}{y}\right)^3 = 18 \\ 2x.\frac{3}{y}\left(2x + \frac{3}{y}\right) = 3 \end{cases}$. Đặt a = 2x; b = $\frac{3}{y}$. (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=1 \end{cases}$

Hệ đã cho có nghiệm: $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3+\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}; \frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$

8/ Giải bất phương trình sau trên tập số thực: $\frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}} \le \frac{1}{\sqrt{5-2x}}$ (1)

Giải: • Với $-2 \le x < \frac{1}{2}$: $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} < 0$, $\sqrt{5-2x} > 0$, nên (1) luôn đúng

• Với $\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} \ge \sqrt{5-2x} \Leftrightarrow 2 \le x < \frac{5}{2}$

Tập nghiệm của (1) là $S = \left[-2; \frac{1}{2}\right) \cup \left[2; \frac{5}{2}\right)$

9/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y \\ (x^2+1)(y+x-2) = y \end{cases}$ (x, y $\in \mathbb{R}$)

Giải: (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} + y + x - 2 = 2 \\ \frac{x^2+1}{y}(y+x-2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{y} = 1 \\ y + x - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 5 \end{cases}$

10/ Giải bất phương trình: $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

Đặt t = $\log_2 x$. (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ \begin{cases} t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right.$$

11/Giải phương trình: $\log^2(x^2+1) + (x^2-5)\log(x^2+1) - 5x^2 = 0$

Giải: Đặt $\log(x^2+1)=y$. PT $\Leftrightarrow y^2+(x^2-5)y-5x^2=0 \Leftrightarrow y=5 \vee y=-x^2$; Nghiệm: $x=\pm\sqrt{99999}$; x = 0

12/ Giải phương trình: $8^x+1=2\sqrt[3]{2^{x+1}-1}$

Giải: Đặt $2^x=u>0; \sqrt[3]{2^{x+1}-1}=v$.

PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ v^3+1=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v>0 \\ u^3-2u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_2\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

13/ Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^2y-x^2+y=2 \\ m\left(x^2+y\right)-x^2y=4 \end{cases}$ có ba nghiệm phân biệt

Giải: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x^4+2(m-3)x^2+2m-4=0 \quad (1) \\ y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases}$.

- Khi m = 1: Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+1=0 \\ y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1} \end{cases} \quad (VN)$
- Khi m ≠ 1. Đặt t = x^2 , $t\ge 0$. Xét $f(t)=(m-1)t^2+2(m-3)t+2m-4=0 \quad (2)$

Hệ PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (1) có ba nghiệm x phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có một nghiệm t = 0 và 1 nghiệm t > 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ S=\dfrac{2(m-3)}{1-m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow m=2$.

14/ Tìm m để hệ phương trình có nghiệm: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases}$.

Giải: Đặt $u=\sqrt{x}, v=\sqrt{y}$ $(u\ge 0, v\ge 0)$. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=1 \\ uv=m \end{cases}$. ĐS: $0\le m\le \dfrac{1}{4}$.

15/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x(x-1)+4(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}=m$

Giải: Đặt $t=(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$. PT có nghiệm khi $t^2+4t-m=0$ có nghiệm, suy ra $m\ge -4$.

16/ Giải phương trình: $3^x.2x = 3^x + 2x + 1$

Giải: Nhận xét; x = ± 1 là các nghiệm của PT. PT $\Leftrightarrow 3^x=\dfrac{2x+1}{2x-1}$.

Dựa vào tính đơn điệu $\Rightarrow$ PT chỉ có các nghiệm x = ± 1.

17/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2-xy=3 & (a) \\ \sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}=4 & (b) \end{cases}$

Giải (b) $\Leftrightarrow x^2+y^2+2\sqrt{(x^2+1).(y^2+1)}=14 \Leftrightarrow xy+2\sqrt{(xy)^2+xy+4}=11$ (c)

Đặt xy = p. $(c) \Leftrightarrow 2\sqrt{p^2+p+4}=11-p \Leftrightarrow \begin{cases} p\le 11 \\ 3p^2+26p-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p=3 \\ p=\dfrac{-35}{3} \end{array}\right.$

(a) $\Leftrightarrow (x+y)^2 = 3xy+3$ • p = xy = $-\dfrac{35}{3}$ (loại) • p = xy = 3 $\Rightarrow x+y=\pm 2\sqrt{3}$

1/ Với $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=y=\sqrt{3}$ 2/ Với $\begin{cases} xy=3 \\ x+y=-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x=y=-\sqrt{3}$

Vậy hệ có hai nghiệm là: $(\sqrt{3};\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};-\sqrt{3})$

18/ Giải bất phương trình: $\log_2(4x^2-4x+1)-2x>2-(x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$

Giải: BPT $\Leftrightarrow x\left[\log_2(1-2x)+1\right]<0$ $\left(x<\dfrac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$ hoặc $x<0$

19/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+1+y(x+y)=4y \\ (x^2+1)(x+y-2)=y \end{cases}$ $(x, y \in \mathbf{R})$

Giải: y = 0 không phải là nghiệm. Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y-2=2 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(x+y-2)=1 \end{cases}$

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}, v=x+y-2$. Ta có hệ $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-2=1 \end{cases}$

Nghiệm của hpt đã cho là (1; 2), (–2; 5).

20/ Tìm m sao cho phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\ln(mx)=2\ln(x+1)$

Giải: 1) ĐKXĐ: $x>-1, mx>0$. Như vậy trước hết phải có $m\neq 0$.

Khi đó, PT $\Leftrightarrow mx=(x+1)^2 \Leftrightarrow x^2+(2-m)x+1=0$ (1)

Phương trình này có: $\Delta=m^2-4m$.

- Với $m\in(0;4) \Rightarrow \Delta<0 \Rightarrow$ (1) vô nghiệm.
- Với $m=0$, (1) có nghiệm duy nhất $x=-1<0 \Rightarrow$ loại.
- Với $m=4$, (1) có nghiệm duy nhất x = 1 thoả ĐKXĐ nên PT đã cho có nghiệm duy nhất.
- Với $m<0$, ĐKXĐ trở thành $-1<x<0$. Khi đó $\Delta>0$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$.

Mặt khác, $f(-1)=m<0, f(0)=1>0$ nên $x_1<-1<x_2<0$, tức là chỉ có x_2 là nghiệm của phương trình đã cho. Như vậy, các giá trị $m<0$ thoả điều kiện bài toán.

- Với $m>4$. Khi đó, điều kiện xác định trở thành $x>0$ và (1) cũng có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$. Áp dụng định lý Viet, ta thấy cả hai nghiệm này đều dương nên các giá trị $m>4$ cũng bị loại.

Tóm lại, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi: $m\in(-\infty;0)\cup\{4\}$.

21/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+91}=\sqrt{y-2}+y^2 & (1) \\ \sqrt{y^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $x\geq 2$ và $y\geq 2$: Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được:

$$\sqrt{x^2+91}-\sqrt{y^2+91}=\sqrt{y-2}-\sqrt{x-2}+y^2-x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}=\frac{y-x}{\sqrt{y-2}+\sqrt{x-2}}+(y-x)(y+x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91}+\sqrt{y^2+91}}+\frac{1}{\sqrt{x-2}+\sqrt{y-2}}+x+y\right)=0$$

$\Leftrightarrow$ x = y (trong ngoặc luôn dương và x và y đều lớn hơn 2)

Vậy từ hệ trên ta có: $\sqrt{x^2+91}=\sqrt{x-2}+x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+91}-10=\sqrt{x-2}-1+x^2-9$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+91}+10}=\dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}+1}+(x-3)(x+3) \Leftrightarrow (x-3)\left((x+3)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+91}+10}-1\right)-\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right)=0$ $\Leftrightarrow$ x = 3

Vậy nghiệm của hệ x = y = 3

22/ Giải bất phương trình: $\log_2(\sqrt{3x+1}+6)-1\ge\log_2(7-\sqrt{10-x})$

Giải: Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\le x\le 10$

BPT $\Leftrightarrow \log_2\dfrac{\sqrt{3x+1}+6}{2}\ge\log_2(7-\sqrt{10-x}) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3x+1}+6}{2}\ge 7-\sqrt{10-x}$

$\Rightarrow \sqrt{3x+1}+6\ge 2(7-\sqrt{10-x}) \Rightarrow \sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x}\ge 8 \Rightarrow 49x^2-418x+369\le 0$

$\Rightarrow 1\le x\le \dfrac{369}{49}$ (thoả)

23/ Giải phương trình: $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

Giải:

Đặt:

$\begin{cases} u=\sqrt{x^2+2},\ u>0 \\ v=\sqrt{x^2+2x+3},\ v>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2=x^2+2 \\ v^2=x^2+2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^2-u^2=2x+1 \\ x^2=\dfrac{v^2-u^2-1}{2} \end{cases}$

PT $\Leftrightarrow (v-u)\left[(v-u)\left(1+\dfrac{v+u}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} v-u=0 & (b) \\ (v+u)\left(1+\dfrac{v+u}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=0 & (c) \end{array}\right.$

Vì u > 0, v > 0, nên (c) vô nghiệm.

Do đó: PT $\Leftrightarrow v-u=0\Leftrightarrow v=u\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

24/ Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2-3x+2}-\sqrt{2x^2-3x+1}\ge x-1$

Giải: Tập xác định: D = $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup\{1\}\cup[2;+\infty)$

- x = 1 là nghiệm
- $x\ge 2$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x-2}\ge\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-1}$ vô nghiệm
- $x\le\dfrac{1}{2}$: BPT $\Leftrightarrow \sqrt{2-x}+\sqrt{1-x}\ge\sqrt{1-2x}$ có nghiệm $x\le\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow$ BPT có tập nghiệm S= $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup\{1\}$

25/ Giải phương trình: $x^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}=2\sqrt{2x^2+5x+2}-8x-5$.

Giải:

Điều kiện: $x\ge-\dfrac{1}{3}$.

PT $\Leftrightarrow \left[(x+1)^2-2(x+1)\sqrt{3x+1}+\left(\sqrt{3x+1}\right)^2\right]+\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2\sqrt{2x^2+5x+2}+\left(\sqrt{2x+1}\right)^2\right]=0$

26/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0 \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2 \end{cases}$

Giải:

$\begin{cases} x^3-6x^2y+9xy^2-4y^3=0 & (1) \\ \sqrt{x-y}+\sqrt{x+y}=2 & (2) \end{cases}$. Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x-y)^2(x-4y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=4y \end{array}\right.$

- Với $x = y$: (2) $\Rightarrow$ x = y = 2
- Với $x = 4y$: (2) $\Rightarrow$ $x=32-8\sqrt{15};\ y=8-2\sqrt{15}$

27/ Giải phương trình: $x^2-3x+1=-\tan\frac{\pi}{6}\sqrt{x^2+x^2+1}$

Giải:

PT $\Leftrightarrow$ $x^2-3x+1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4+x^2+1}$ (1)

Chú ý: $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$, $x^2-3x+1=2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)$

Do đó: (1) $\Leftrightarrow$ $2(x^2-x+1)-(x^2+x+1)=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$.

Chia 2 vế cho $x^2+x+1=\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2$ và đặt $t=\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}},\ t>0$

Ta được: (1) $\Leftrightarrow$ $2t^2+\frac{\sqrt{3}}{3}t-1=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{-3}{2\sqrt{3}}<0 \\ t=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$ $\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=1$.

28/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+5x+y=9 \\ 3x^3+x^2y+2xy+6x^2=18 \end{cases}$

Giải: Hệ PT $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=9-x^2-5x \\ x^4+4x^3-5x^2-18x+18=0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} y=9-x^2-5x \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \\ x=-1\pm\sqrt{7} \end{array}\right. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1;\ y=3 \\ x=-3;\ y=15 \\ x=-1-\sqrt{7};\ y=6+3\sqrt{7} \\ x=-1+\sqrt{7};\ y=6-3\sqrt{7} \end{array}\right.$

29/ Giải bất phương trình: $\sqrt{x-3}\le\sqrt{x+12}-\sqrt{2x+1}$

Giải: BPT $\Leftrightarrow$ $3\le x\le 4$.

30/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$.

Giải : Hệ PT $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-2\sqrt{y}\right)=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \sqrt{x}-2\sqrt{y}=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=4y \\ \sqrt{4y-1}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

31/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 7y^3 & (1) \\ 4x^2y + 6x = y^2 & (2) \end{cases}$

Giải:

Từ (1) $\Rightarrow y \neq 0$. Khi đó Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = 7y^3 \\ 4x^2y^2 + 6xy = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = xy \\ 8t^3 + 27 = 4t^2 + 6t \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = xy \\ t = -\dfrac{3}{2};\ t = \dfrac{1}{2};\ t = \dfrac{9}{2} \end{cases}$$

- Với $t = -\dfrac{3}{2}$: Từ (1) $\Rightarrow y = 0$ (loại). • Với $t = \dfrac{1}{2}$: Từ (1) $\Rightarrow \left(x = \dfrac{1}{2\sqrt[3]{4}}; y = \sqrt[3]{4} \right)$
- Với $t = \dfrac{9}{2}$: Từ (1) $\Rightarrow \left(x = \dfrac{3}{2\sqrt[3]{4}}; y = 3\sqrt[3]{4} \right)$

32/ Giải phương trình: $3^x.2x = 3^x + 2x + 1$

Giải

PT $\Leftrightarrow 3^x(2x-1) = 2x+1$ (1). Ta thấy $x = \dfrac{1}{2}$ không phải là nghiệm của (1).

Với $x \neq \dfrac{1}{2}$, ta có: (1) $\Leftrightarrow 3^x = \dfrac{2x+1}{2x-1} \Leftrightarrow 3^x - \dfrac{2x+1}{2x-1} = 0$

Đặt $f(x) = 3^x - \dfrac{2x+1}{2x-1} = 3^x - 2 - \dfrac{3}{2x-1}$. Ta có: $f'(x) = 3^x \ln 3 + \dfrac{6}{(2x-1)^2} > 0, \forall x \neq \dfrac{1}{2}$

Do đó *f(x)* đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \Rightarrow$ Phương trình *f(x)* = 0 có nhiều nhất 1 nghiệm trên từng khoảng $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right), \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta thấy $x = 1,\ x = -1$ là các nghiệm của *f(x)* = 0. Vậy PT có 2 nghiệm $x = 1,\ x = -1$.

33/ Giải phương trình: $\sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} = 2$

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq \sqrt{x^2 - 1} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Khi đó: $\sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}} > \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}} \geq \sqrt[4]{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ (do $x \geq 1$)

$\Rightarrow$ VT $> \sqrt[4]{x - \sqrt{x^2 - 1}} + \sqrt[4]{x + \sqrt{x^2 - 1}} \overset{Cô-Si}{\geq} 2\sqrt[8]{\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = 2 \Rightarrow$ PT vô nghiệm.

34/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Giải: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{x+y}=x^2-y & (2) \end{cases}$. Điều kiện: $x+y>0$.

$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2-1-2xy\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$

(vì $x+y>0$ nên $x^2+y^2+x+y>0$)

Thay $x=1-y$ vào (2) ta được: $1=x^2-(1-x) \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (y=0) \\ x=-2 & (y=3) \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm: (1; 0), (–2; 3).

35/ Giải hệ phương trình: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$

Giải: Điều kiện: $x\le\dfrac{6}{5}$. Đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{3x-2} \\ v=\sqrt{6-5x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3=3x-2 \\ v^2=6-5x \end{cases}$.

Ta có hệ PT: $\begin{cases} 2u+3v=8 \\ 5u^3+3v^2=8 \end{cases}$. Giải hệ này ta được $\begin{cases} u=-2 \\ v=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-2=-2 \\ 6-5x=16 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$.

Thử lại, ta thấy $x=-2$ là nghiệm của PT. Vậy PT có nghiệm $x=-2$.

36/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2y^2-x^2=1 \\ 2x^3-y^3=2y-x \end{cases}$

Giải: Ta có: $2x^3-y^3=\left(2y^2-x^2\right)\left(2y-x\right) \Leftrightarrow x^3+2x^2y+2xy^2-5y^3=0$

Khi $y=0$ thì hệ VN.

Khi $y\neq 0$, chia 2 vế cho $y^3\neq 0$ ta được: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)-5=0$

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, ta có : $t^3+2t^2+2t-5=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1, x=y=-1$

37/ Tìm các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình $\begin{cases} 2y-x=m \\ y+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Giải: $\begin{cases} 2y-x=m & (1) \\ y+\sqrt{xy}=1 & (2) \end{cases}$.

Từ (1) $\Rightarrow$ $x=2y-m$, nên (2) $\Leftrightarrow \sqrt{2y^2-my}=1-y \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 1 \\ m=y-\dfrac{1}{y}+2 \end{cases}$ (vì $y\neq 0$)

Xét $f\left(y\right)=y-\dfrac{1}{y}+2 \Rightarrow f'\left(y\right)=1+\dfrac{1}{y^2}>0$

Dựa vào BTT ta kết luận được hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m>2$.

38/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3\left(x^3-y^3\right)=4xy \\ x^2y^2=9 \end{cases}$

Giải: Ta có : $x^2y^2=9 \Leftrightarrow xy=\pm 3$.

- Khi: $xy=3$, ta có: $x^3-y^3=4$ và $x^3.\left(-y^3\right)=-27$

Suy ra: $x^3;(-y^3)$ là các nghiệm của phương trình: $X^2-4X-27=0 \Leftrightarrow X=2\pm\sqrt{31}$

Vậy nghiệm của Hệ PT là:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}, y=-\sqrt[3]{2-\sqrt{31}} \text{ hoặc } x=\sqrt[3]{2-\sqrt{31}}, y=-\sqrt[3]{2+\sqrt{31}}.$$

• Khi: $xy=-3$, ta có: $x^3-y^3=-4$ và $x^3.(-y^3)=27$

Suy ra: $x^3;(-y^3)$ là nghiệm của phương trình: $X^2+4X+27=0$ $(PTVN)$

39/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+y^2-1}+2\dfrac{y}{x}=1 \\ x^2+y^2+4\dfrac{x}{y}=22 \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $x\neq 0, y\neq 0, x^2+y^2-1\neq 0$

Đặt $u=x^2+y^2-1; v=\dfrac{x}{y}$. Hệ PT trở thành: $\begin{cases} \dfrac{3}{u}+\dfrac{2}{v}=1 \\ u+1+4v=22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{u}+\dfrac{2}{v}=1 & (1) \\ u=21-4v & (2) \end{cases}$

Thay (2) vào (1) ta được: $\dfrac{3}{21-4v}+\dfrac{2}{v}=1 \Leftrightarrow 2v^2-13v+21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=3 \\ v=\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$

• Nếu $v = 3$ thì $u = 9$, ta có Hệ PT: $\begin{cases} x^2+y^2-1=9 \\ \dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x=3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$

• Nếu $v=\dfrac{7}{2}$ thì $u = 7$, ta có Hệ PT:

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=7 \\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8 \\ x=\dfrac{7}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ x=14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{cases} \vee \begin{cases} y=-4\sqrt{\dfrac{2}{53}} \\ x=-14\sqrt{\dfrac{2}{53}} \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta được 4 nghiệm của Hệ PT.

40/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{3}(x-y)=2\sqrt{xy} \\ 2x-y^2=8 \end{cases}$

Giải: $\begin{cases} \sqrt{3}(x-y)=2\sqrt{xy} & (1) \\ 2x-y^2=8 & (2) \end{cases}$. Điều kiện : $x.y\geq 0$; $x\geq y$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow$ $3(x-y)^2=4xy \Leftrightarrow (3x-y)(x-3y)=0 \Leftrightarrow x=3y$ *hay* $x=\dfrac{y}{3}$

• Với $x=3y$, thế vào (2) ta được : $y^2-6y+8=0 \Leftrightarrow y=2$; $y=4$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$

• Với $x=\dfrac{y}{3}$, thế vào (2) ta được : $3y^2-2y+24=0$ Vô nghiệm.

Kết luận: hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$; $\begin{cases} x=12 \\ y=4 \end{cases}$

41/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases}$

Giải: Từ hệ PT $\Rightarrow$ $y\neq 0$. Khi đó ta có: $\begin{cases} x^2+y^2+xy+1=4y \\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4 \\ (x+y)^2-2\dfrac{x^2+1}{y}=7 \end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}, v=x+y$ ta có hệ: $\begin{cases} u+v=4 \\ v^2-2u=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4-v \\ v^2+2v-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=3, u=1 \\ v=-5, u=9 \end{array}\right.$

• Với $v=3, u=1$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=y \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=y \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2=0 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, y=2 \\ x=-2, y=5 \end{array}\right.$.

• Với $v=-5, u=9$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

Kết luận: Hệ đã cho có hai nghiệm: $(1;2), (-2;5)$.

42/ Giải phương trình: $\sqrt{x+1}+1=4x^2+\sqrt{3x}$

Giải: Điều kiện $x\geq 0$.

PT $\Leftrightarrow$ $4x^2-1+\sqrt{3x}-\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow (2x+1)(2x-1)+\dfrac{2x-1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}=0$

$\Leftrightarrow (2x-1)\left(2x+1+\dfrac{1}{\sqrt{3x}+\sqrt{x+1}}\right)=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

43 / Giải hệ phương trình:

$\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4) \qquad =1 \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} -xy-2x+y+2>0, x^2-2x+1>0, y+5>0, x+4>0 \\ 0<1-x\neq 1, 0<2+y\neq 1 \end{cases}$ (*)

Hệ PT $\Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)]+2\log_{2+y}(1-x)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4) \qquad =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2)+\log_{2+y}(1-x)-2=0 \quad (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4) \qquad =1 \quad (2) \end{cases}$

Đặt $\log_{2+y}(1-x)=t$ thì (1) trở thành: $t+\dfrac{1}{t}-2=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ ta có: $1-x=y+2 \Leftrightarrow y=-x-1$ (3). Thế vào (2) ta có:

$\log_{1-x}(-x+4)-\log_{1-x}(x+4) \quad =1 \Leftrightarrow \log_{1-x}\dfrac{-x+4}{x+4}=1 \Leftrightarrow \dfrac{-x+4}{x+4}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

• Với $x=0 \Rightarrow y=-1$ (không thoả (*)).

• Với $x=-2 \Rightarrow y=1$ (thoả (*)).

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=-2, y=1$.

44/ Giải bất phương trình: $\left(4^x-2.2^x-3\right).\log_2 x-3>4^{\frac{x+1}{2}}-4^x$

Giải:BPT $\Leftrightarrow (4^x - 2.2^x - 3).\log_2 x - 3 > 2^{x+1} - 4^x \Leftrightarrow (4^x - 2.2^x - 3).(\log_2 x + 1) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{2x} - 2.2^x - 3 > 0 \\ \log_2 x + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{2x} - 2.2^x - 3 < 0 \\ \log_2 x + 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x > 3 \\ \log_2 x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x < 3 \\ \log_2 x < -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > \log_2 3 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x < \log_2 3 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \log_2 3 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

45/ Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$\log_5(25^x - \log_5 a) = x$

Giải: PT $\Leftrightarrow 25^x - \log_5 a = 5^x \Leftrightarrow 5^{2x} - 5^x - \log_5 a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5^x,\ t > 0 \\ t^2 - t - \log_5 a = 0 \qquad (*) \end{cases}$

PT đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (*) có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow t^2 - t = \log_5 a$ có đúng 1 nghiệm dương.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$ với $t \in [0; +\infty)$. Ta có: $f'(t) = 2t - 1 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$.

Dựa vào BBT ta suy ra phương trình $f(t) = \log_5 a$ có đúng 1 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_5 a \ge 0 \\ \log_5 a = -\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \ge 1 \\ a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{array}\right..$$

46/ Giải hệ phương trình: $2\log_3\left(x^2 - 4\right) + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ \log_3(x+2)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ (x+2)^2 \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x \le -3 \end{array}\right.$ (**)

PT $\Leftrightarrow \log_3\left(x^2 - 4\right)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - \log_3(x-2)^2 = 4$

$\Leftrightarrow \log_3(x+2)^2 + 3\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\log_3(x+2)^2} + 4\right)\left(\sqrt{\log_3(x+2)^2} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3(x+2)^2} = 1 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 3 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$

Kiểm tra điều kiện (**) chỉ có $x = -2 - \sqrt{3}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là: $x = -2 - \sqrt{3}$

47 / Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$.

Giải: $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x & (1) \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) & (2) \end{cases}$

Từ (2) suy ra $y^2 - 5x^2 = 4$ (3).

Thế vào (1) được: $x^3 + \left(y^2 - 5x^2\right).y = y^3 + 16x \Leftrightarrow x^3 - 5x^2y - 16x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x^2 - 5xy - 16 = 0$

- Với $x = 0 \Rightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = \pm 2$.
- Với $x^2 - 5xy - 16 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 16}{5x}$ (4). Thế vào (3) được: $\left(\frac{x^2 - 16}{5x}\right)^2 - 5x^2 = 4$

$\Leftrightarrow\ x^4-32x^2+256-125x^4=100x^2 \Leftrightarrow 124\ x^4+132x^2-256=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 & (y=-3) \\ x=-1 & (y=3) \end{array}\right.$.

Vậy hệ có 4 nghiệm: (x; y) = (0; 2) ; (0; –2); (1; –3); (–1; 3)

48/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\sqrt{x+y}=3\log_8(\sqrt{x-y}+2) \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $x+y>0,\ x-y\geq 0$

Hệ PT $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=2+\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$.

Đặt: $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{u}-\sqrt{v}=2\ (u>v) \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{uv}+4 \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{uv}+4 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2-2uv+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 & (2) \end{cases}$.

Thế (1) vào (2) ta có: $\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0$.

Kết hợp (1) ta có: $\begin{cases} uv=0 \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=4,\ v=0$ (với $u>v$). Từ đó ta có: $x=2;\ y=2$.(thoả đk)

Kết luận: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y)$ = (2; 2).

49/ Giải phương trình: $25^x-6.5^x+5=0$

Giải: Câu 2: 1) $25^x-6.5^x+5=0 \Leftrightarrow (5^x)^2-6.5^x+5=0 \Leftrightarrow 5^x=1$ hay $5^x=5$

$\Leftrightarrow$ x = 0 hay x = 1.

50/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 \end{cases}$

Giải: $\begin{cases} x-2y-\sqrt{xy}=0 & (1) \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{4y-1}=2 & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq \dfrac{1}{4} \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow \dfrac{x}{y}-\sqrt{\dfrac{x}{y}}-2=0 \Rightarrow x=4y$

Nghiệm của hệ $(2;\dfrac{1}{2})$

51/ Tìm m để bất phương trình: $5^{2x}-5^{x+1}-2m5^x+m^2+5m>0$ thỏa với mọi số thực x.

Giải: Đặt $X=5^x \Rightarrow X>0$

Bất phương trình đã cho trở thành: $X^2+(5+2m)X+m^2+5m>0$ (*)

Bpt đã cho có nghiệm với mọi x khi và chỉ khi (*) có nghiệm với mọi $X>0$

$\Leftrightarrow \Delta<0$ hoặc (*) có hai nghiệm $X_1\leq X_2\leq 0$

Từ đó suy ra m

52/ Giải bất phương trình: $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}>\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

Giải: Điều kiện: $x>3$; Phương trình đã cho tương đương:

$\frac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)+\frac{1}{2}\log_{3^{-1}}(x-2)>\frac{1}{2}\log_{3^{-1}}(x+3)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_3\left(x^2-5x+6\right)-\frac{1}{2}\log_3(x-2)>-\frac{1}{2}\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow\log_3\left[(x-2)(x-3)\right]>\log_3(x-2)-\log_3(x+3)\Leftrightarrow\log_3\left[(x-2)(x-3)\right]>\log_3\left(\frac{x-2}{x+3}\right)$

$\Leftrightarrow(x-2)(x-3)>\frac{x-2}{x+3}$

$\Leftrightarrow x^2-9>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{10}\\x>\sqrt{10}\end{array}\right.$ Giao với điều kiện, ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x>\sqrt{10}$

53/ Cho phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3$

Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất.

Giải: Phương trình $\sqrt{x}+\sqrt{1-x}+2m\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=m^3$ (1)

Điều kiện : $0\le x\le 1$

Nếu $x\in[0;1]$ thỏa mãn (1) thì 1 – x cũng thỏa mãn (1) nên để (1) có nghiệm duy nhất thì cần có điều kiện

$x=1-x\Rightarrow x=\frac{1}{2}$. Thay $x=\frac{1}{2}$ vào (1) ta được: $2.\frac{1}{\sqrt{2}}+m-2.\frac{1}{\sqrt{2}}=m^3\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m=0\\m=\pm1\end{array}\right.$

*Với m = 0; (1) trở thành: $\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ Phương trình có nghiệm duy nhất.

* Với m = -1; (1) trở thành

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt{x(1-x)}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=-1$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}\right)+\left(x+1-x-2\sqrt{x(1-x)}\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}\right)^2+\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)^2=0$

+ Với $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ + Với $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Trường hợp này, (1) cũng có nghiệm duy nhất.

* Với m = 1 thì (1) trở thành:

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}-2\sqrt[4]{x(1-x)}=1-2\sqrt{x(1-x)}\Leftrightarrow\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}\right)^2=\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)^2$

Ta thấy phương trình (1) có 2 nghiệm $x=0, x=\frac{1}{2}$ nên trong trường hợp này (1) không có nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi m = 0 và m = -1.

54/ Giải phương trình : $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$

Giải: $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ (2)

Điều kiện:

$\left\{\begin{array}{l}x+1\ne0\\4-x>0\\4+x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4<x<4\\x\ne-1\end{array}\right.$ $(2)\Leftrightarrow\log_2|x+1|+2=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)\Leftrightarrow\log_2|x+1|+2=\log_2\left(16-x^2\right)$

$\Leftrightarrow\log_2 4|x+1|=\log_2\left(16-x^2\right)\Leftrightarrow4|x+1|=16-x^2$

+ Với $-1<x<4$ ta có phương trình $x^2+4x-12=0$ (3); (3) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-6\text{ (loại)}\end{array}\right.$

+ Với $-4<x<-1$ ta có phương trình $x^2-4x-20=0$ (4);

$(4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{24}\\x=2+\sqrt{24}\,(\text{loại})\end{array}\right.$; Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ hoặc $x=2\left(1-\sqrt{6}\right)$

55/ 1). Giải phương trình: $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$

2) Giải phương trình: $4^x-2^{x+1}+2\left(2^x-1\right)\sin\left(2^x+y-1\right)+2=0$.

3) Giải bất phương trình: $9^{x^2+x-1}+1\ge 10.3^{x^2+x-2}$.

Giải

1) Giải phương trình : $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0$. (a)

* Đặt: $\begin{cases}u=\sqrt{x^2+2},\ u>0\\v=\sqrt{x^2+2x+3},\ v>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u^2=x^2+2\\v^2=x^2+2x+3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v^2-u^2=2x+1\\x^2=\dfrac{v^2-u^2-1}{2}\end{cases}$

- Ta có:

$$(a)\Leftrightarrow v^2-u^2+\left(\frac{v^2-u^2-1}{2}\right).u+\left(\frac{v^2-u^2-1}{2}+1\right).v=0\Leftrightarrow v^2-u^2+\left(\frac{v^2-u^2}{2}\right).u-\frac{u}{2}+\left(\frac{v^2-u^2}{2}\right).v+\frac{v}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow (v-u)\left[(v-u)\left(1+\frac{v+u}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}v-u=0 & (b)\\(v+u)\left(1+\dfrac{v+u}{2}\right)+\dfrac{1}{2}=0 & (c)\end{array}\right.$$

- Vì u > 0, v > 0, nên (c) vô nghiệm.
- Do đó:

$$(a)\Leftrightarrow v-u=0\Leftrightarrow v=u\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+3}=\sqrt{x^2+2}\Leftrightarrow x^2+2x+3=x^2+2\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Kết luận, phương trình có nghiệm duy nhất: $x=-\dfrac{1}{2}$.

2) Giải phương trình $4^x-2^{x+1}+2\left(2^x-1\right)\sin\left(2^x+y-1\right)+2=0$ (*)

Ta có: (*) $\Leftrightarrow\left(2^x-1+\sin\left(2^x+y-1\right)\right)^2+\cos^2\left(2^x+y-1\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}2^x-1+\sin\left(2^x+y-1\right)=0(1)\\\cos\left(2^x+y-1\right)=0(2)\end{cases}$

Từ (2) $\Rightarrow\sin\left(2^x+y-1\right)=\pm1$.

Khi $\sin\left(2^x+y-1\right)=1$, thay vào (1), ta được: $2^x=0$ (VN)

Khi $\sin\left(2^x+y-1\right)=-1$, thay vào (1), ta được: $2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

Thay x = 1 vào (1) $\Rightarrow$ sin(y +1) = -1 $\Leftrightarrow y=-1-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm: $\left(1;-1-\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right)$.

3) Giải bất phương trình: $9^{x^2+x-1}+1\ge 10.3^{x^2+x-2}$.   Đặt $t=3^{x^2+x}$, t > 0.
Bất phương trình trở thành: $t^2 - 10t + 9 \ge 0 \Leftrightarrow$ ($t \le 1$ hoặc $t \ge 9$)

Khi $t \le 1 \Rightarrow t=3^{x^2+x}\le 1 \Leftrightarrow x^2+x\le 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 0$.(i)

Khi $t \ge 9 \Rightarrow t=3^{x^2+x}\ge 9 \Leftrightarrow x^2+x-2\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -2\\ x\ge 1\end{array}\right.$ (2i)

Kết hợp (i) và (2i) ta có tập nghiệm của bpt là: S = (- ∞; -2]∪[-1;0]∪[1; + ∞).

56/ Giải phương trình, hệ phương trình:

1. $\sqrt{(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}}=\sqrt{x-2}$;   2. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12\\ y\sqrt{x^2-y^2}=12\end{cases}$

Giải: 1) Phương trình đã cho tương đương:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=0\\ \begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}=1\\ x-2>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=0\\ \begin{cases}\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)^{\log_3 x}=0\\ x>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \begin{cases}\log_3 x\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\\ x>2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\log_3 x=0\\ \ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\end{array}\right.\\ x>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x-\frac{1}{2}=1\end{array}\right.\\ x>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\frac{3}{2}\end{array}\right.\\ x>2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$$ Điều kiện: $|x|\ge|y|$

Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{x^2-y^2};u\ge 0\\ v=x+y\end{cases}$; $x=-y$ không thỏa hệ nên xét $x\ne -y$ ta có $y=\frac{1}{2}\left(v-\frac{u^2}{v}\right)$.

2) Hệ phương trình đã cho có dạng:

$$\begin{cases}u+v=12\\ \frac{u}{2}\left(v-\frac{u^2}{v}\right)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4\\ v=8\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}u=3\\ v=9\end{cases}$$

+ $\begin{cases}u=4\\ v=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=4\\ x+y=8\end{cases}$ (I)

+ $\begin{cases}u=3\\ v=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}=3\\ x+y=9\end{cases}$ (II) Giải hệ (I), (II). Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $S=\{(5;3),(5;4)\}$ Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $S=\{(5;3),(5;4)\}$

57/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+1+y(x+y)=4y\\ (x^2+1)(x+y-2)=y\end{cases}$ $(x,y\in\mathbf{R})$

Giải:

2) Hệ phương trình tương đương với $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}+(x+y-2)=2 \\ \dfrac{x^2+1}{y}(x+y-2)=1 \end{cases}$ Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y}, v=x+y-2$

Ta có hệ $\begin{cases} u+v=2 \\ uv=1 \end{cases} \Leftrightarrow u=v=1$ Suy ra $\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{y}=1 \\ x+y-2=1 \end{cases}$.

Giải hệ trên ta được nghiệm của hệ phưng trình đã cho là (1; 2), (-2; 5)

58 / Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$$9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0\ (1)$$

Giải: * Đk $x\in[-1;1]$, đặt t = $3^{1+\sqrt{1-x^2}}$; $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[3;9]$

Ta có: (1) viết lại $t^2-(m+2)t+2m+1=0\Leftrightarrow(t-2)m=t^2-2t+1\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$

Xét hàm số f(t) = $\dfrac{t^2-2t+1}{t-2}$, với $t\in[3;9]$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2-4t+3}{(t-2)}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên

t	3		9
f′(t)		+	
f(t)			$\frac{48}{7}$
	4		

Căn cứ bảng biến thiêng, (1) có nghiệm $x\in[-1;1]$ ⇔ (2) có nghiệm $t\in[3;9]\Leftrightarrow 4\le m\le\dfrac{48}{7}$

59/ Giải phương trình: $\dfrac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$

Giải: bất phương trình:

$$\frac{1}{2}\log_2(x^2+4x-5)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+7}\right)\quad(1)$$

Đk: $\begin{cases} x^2+4x-5>0 \\ x+7>0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(-\infty;-5)\cup(1;+\infty) \\ x>-7 \end{cases}\Rightarrow x\in(-7;-5)\cup(1+\infty)$

Từ (1) $\Rightarrow\log_2(x^2+4x-5)>-2\log_2\dfrac{1}{x+7}$

$\Leftrightarrow\log_2(x^2+4x-5)>\log_2(x+7)^2\Leftrightarrow x^2+4x-5>x^2+14x+49$

$\Leftrightarrow-10x>54\Leftrightarrow x<\dfrac{-27}{5}$

Kết hợp điều kiện: Vậy BPT có nghiệm: $x\in(-7;\dfrac{-27}{5})$

60/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3=1 & (1) \\ 2x^3+y^3-x^2y-2xy^2=0 & (2) \end{cases}$$

$y\neq 0$. Ta có: $\begin{cases} x^3+y^3=1 & (3) \\ 2\left(\frac{x}{y}\right)^3-\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\left(\frac{x}{y}\right)+1=0 & (4) \end{cases}$

Đặt : $\frac{x}{y}=t$ (4) có dạng : $2t^3-t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow t=\pm 1,\ t=\frac{1}{2}$.

a) Nếu t = 1 ta có hệ $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

b) Nếu t = -1 ta có hệ $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x=-y \end{cases} \Leftrightarrow$ hệ vô nghiệm.

c) Nếu $t=\frac{1}{2}$ ta có hệ $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt[3]{3}}{3},\quad y=\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

61/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực: $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x}=m$

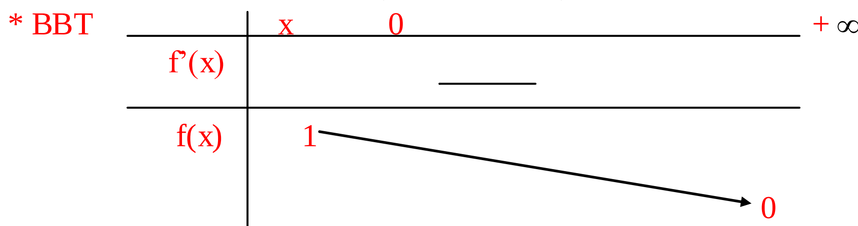
Giải: D = [0 ; + ∞)

*Đặt f(x) = $\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x\sqrt{x}-\sqrt[4]{(x^2+1)^3}}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}.\sqrt{x}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^3}}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^3}.\sqrt{x}}$

Suy ra: f'(x) = $\frac{1-\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^3}}{2\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^3}.\sqrt{x}}<0\quad \forall x\in(0;+\infty)$

* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[4]{x^2+1}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+1-x^2}{(\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x^2+1}+x)}\right]=0$

* BBT



x	0	+ ∞
f'(x)	—	
f(x)	1 ↘	0

Vậy: 0 < m ≤ 1

62/ Giải bất phương trình: $\log_x 3 < \log_{\frac{x}{3}} 3$

Giải: ĐK : $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ Bất phương trình trở thành :

$$\frac{1}{\log_3 x} < \frac{1}{\log_3 \frac{x}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} < \frac{1}{\log_3 x - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} - \frac{1}{\log_3 x - 1} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{\log_3 x(\log_3 x - 1)} < 0 \Leftrightarrow \log_3 x(\log_3 x - 1) > 0 \Leftrightarrow \log_3 x < 0 \vee \log_3 x > 1$$

* $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ kết hợp ĐK : $0 < x < 1$

* $\log_3 x > 0 \Leftrightarrow x > 3$

Vậy tập nghiệm của BPT: $x \in (0\,;1) \cup (3\,;+\infty)$

63/ .Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \geq 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$,

2.BPT (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ \begin{cases} t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \leq -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $(0;\frac{1}{2}] \cup (8;16)$

64/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+91} = \sqrt{y-2} + y^2 \ (1) \\ \sqrt{y^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2 \ (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $x \geq 2$ và $y \geq 2$: Lấy (1) trừ (2) vế theo vế ta được:

$$\sqrt{x^2+91} - \sqrt{y^2+91} = \sqrt{y-2} - \sqrt{x-2} + y^2 - x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+91} + \sqrt{y^2+91}} = \frac{y-x}{\sqrt{y-2} + \sqrt{x-2}} + (y-x)(y+x)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+91} + \sqrt{y^2 = 91}} + \frac{1}{\sqrt{x-2} + \sqrt{y-2}} + x + y\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ x = y (trong ngoặc luôn dương và x vay đều lớn hơn 2)

Vậy từ hệ trên ta có: $\sqrt{x^2+91} = \sqrt{x-2} + x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+91} - 10 = \sqrt{x-2} - 1 + x^2 - 9$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2+91} + 10} = \frac{x-3}{\sqrt{x-2} + 1} + (x-3)(x+3) \Leftrightarrow (x-3)\left((x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+91}+10} - 1\right) - \frac{1}{\sqrt{x-2}+1}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = 3$

Vậy nghiệm của hệ x = y = 3

65/ Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Giải: Đặt $u = \sqrt[3]{x+34},\ v = \sqrt[3]{x-3}$. Ta có:

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)(u^2+v^2+uv) = 37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)^2 + 3uv = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -3 \\ v = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với = -3 , v = - 4 ta có : x = - 61

Với = 4, v = 3 ta có : x = 30 vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: x = -61 vµ x = 30

66/ Giải bấ phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: §K: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \ge 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$,

BPT (1)

$\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ \begin{cases} t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là $(0; \frac{1}{2}] \cup (8;16)$

67/ .

1. Giải phương trình: $3.25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x - 3$

2. Giải phương trình: $\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{\frac{1}{x}}(\cos x + \cos 2x) = 0$.

3) Giải bất phương trình: $(x^3+1) + (x^2+1) + 3x\sqrt{x+1} > 0$

Giải:

1. $3.25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} = x - 3$

$$\Leftrightarrow 5^{x-2}(3.5^{x-2} - 1) + x(3.5^{x-2} - 1) - 3(3.5^{x-2} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3.5^{x-2} - 1)(5^{x-2} + x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3.5^{x-2} - 1 = 0 & (1) \\ 5^{x-2} + x - 3 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

$(1)\Leftrightarrow 5^{x-2}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=2+\log_5\frac{1}{3}=2-\log_5 3\ (2)\Leftrightarrow 5^{x-2}=-x+3$

Vế trái là hàm đồng biến vế phải là hàm nghịch biến mà (2) có nghiệm x = 2 nên là nghiệm duy nhất.

Vậy Pt có nghiệm là: x = $2-\log_5 3$ và x = 2

2/ $\log_x(\cos x-\sin x)+\log_{\frac{1}{x}}(\cos x+\cos 2x)=0$

Điều kiện: $\begin{cases}0<x\neq 1\\ \cos x-\sin x>0\\ \cos x+\cos 2x>0\end{cases}$. Khi đó Pt

$\Leftrightarrow \cos 2x=-\sin x\Leftrightarrow \cos 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x=x+\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ 2x=-x-\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}\end{cases}$.

Kết hợp với điều kiện ta được: $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k2\pi}{3}$ (Với k ∊ N* k 3/ 3/

3/. $(x^3+1)+(x^2+1)+3x\sqrt{x+1}>0\Leftrightarrow(x^3+x^2)+3\sqrt{x^3+x^2}+2>0$

$\Leftrightarrow t^2+3t+2>0$ Đặt $t=x\sqrt{x+1}\geq-\frac{2}{3}$ $\Leftrightarrow\begin{cases}t\geq-\frac{2}{3}\\ \left[\begin{array}{l}t>-1\\ t<-2\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow t\geq-\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\sqrt{x+1}\geq-\frac{2}{3}\Leftrightarrow x\geq -1$

68/ Giải phương trình: $3^x.2x = 3^x + 2x + 1$

Giải: Ta thấy phương trình: $3^x.2x = 3^x + 2x + 1$ (2) có hai nghiệm x = ± 1.

Ta có x = $\frac{1}{2}$ không là nghiệm của phương trình nên

(2) $\Leftrightarrow 3^x=\frac{2x+1}{2x-1}$

Ta có hàm số y = 3^x tăng trên R

hàm số y = $\frac{2x+1}{2x-1}$ luôn giảm trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{2};\infty\right)$

Vậy Phương trình (2) chỉ có hai nghiệm x = ± 1

69/ Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=3\log_8(4x)$.

Giải: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=3\log_8(4x)$.

Điều kiện:

$\begin{cases} x > -3 \\ x \neq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 1$. Biến đổi theo logarit cơ số 2 thành phương trình

$$\log_2\left[(x+3)(x-1)\right] = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ (\text{loại}) \\ x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$$

70/ Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc đoạn :

$$3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m \quad (m \in R).$$

Giải:Đặt $f(x) = 3\sqrt{1-x^2} - 2\sqrt{x^3+2x^2+1}$, suy ra $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

$$f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right).$$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$ ta có $x > -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4 > 0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0$.

Vậy:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	||
			1		
			CĐ		
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	↗		↘	-4

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc $\left[-\frac{1}{2};1\right] \Leftrightarrow -4 \leq m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m = 1$.

71/ 1.Giaûi baát phöông trình:

$$\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2.\sqrt{x^2-5x+4}$$

2.Cho phöông trình: $2\log_4(2x^2 - x + 2m - 4m^2) + \log_{1/2}(x^2 + mx - 2m^2) = 0$

Xaùc ñònh tham soá m ñeå phöông trình (1) coù 2 nghieäm x_1, x_2 thoûa : $x_1^2 + x_2^2 > 1$

Giải: 1) Giaûi baát phöông trình: $\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2.\sqrt{x^2-5x+4}$

Ñieàu kieän: $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0 \end{cases}$

Ta coù:

Baát phöông trình $\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \geq 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$ (*)

Neáu x = 1 thì hieån nhieân (*) ñuùng . Suy ra x=1 laø nghieäm cuûa phöông trình

Neáu x < 1 thì (*) trôû thaønh : $\sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$

Nhaän xeùt: $\begin{cases}\sqrt{2-x}>\sqrt{4-x}\\ \sqrt{3-x}>\sqrt{4-x}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{2-x}+\sqrt{3-x}<2\sqrt{4-x}$ Suy ra Baát phöông trình voâ nghieäm.

Neáu $x\geq 4$ thì (*) trôû thaønh : $\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\geq 2\sqrt{x-4}$

Nhaän xeùt: $\begin{cases}\sqrt{x-2}>\sqrt{x-4}\\ \sqrt{x-3}>\sqrt{x-4}\end{cases}\Rightarrow\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}>2\sqrt{x-4}$ Suy ra Baát phöông trình ñuùng $\forall x\geq 4$.

Toùm laïi: Baát phöông trình coù nghieäm laø: $x=1\vee x\geq 4$.

2) $2\log_4(2x^2-x+2m-4m^2)+\log_{1/2}(x^2+mx-2m^2)=0$

$$\Leftrightarrow\log_2(2x^2-x+2m-4m^2)-\log_2(x^2+mx-2m^2)=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx-2m^2>0\\ x^2-(1+m)x+2m-2m^2=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx-2m^2>0\\ x_1=2m, x_2=1-m\end{cases}$$

Yeâu caàu baøi toaùn $\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2>1\\ x_1^2+mx_1-2m^2>0\\ x_2^2+mx_2-2m^2>0\end{cases}$ vôùi $x_1=2m, x_2=1-m$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5m^2-2m>0\\ 4m^2>0\\ -2m^2-m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow -1<m<0\vee\frac{2}{5}<m<\frac{1}{2}$$

72/ Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2\\ y-y^2x-2y^2=-2\end{cases}$

Giải: ĐK : $y\neq 0$

hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+x-\dfrac{1}{y}-2=0\\ \dfrac{2}{y^2}+\dfrac{1}{y}-x-2=0\end{cases}$ đưa hệ về dạng $\begin{cases}2u^2+u-v-2=0\\ 2v^2+v-u-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}u=v\\ u=1-v\end{array}\right.\\ 2v^2+v-u-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=v=1\\ u=v=-1\end{array}\right.$

hoặc $\begin{cases}u=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\\ v=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2}\end{cases}$, $\begin{cases}u=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\\ v=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2}\end{cases}$

Từ đó ta có nghiệm của hệ(-1 ;-1),(1 ;1), $\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2};\dfrac{2}{\sqrt{7}-1}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};\dfrac{2}{\sqrt{7}+1}\right)$

73/ Giải bất phương trình $\dfrac{\log_3(x+1)^2-\log_4(x+1)^3}{x^2-5x-6}>0$

Giải: Đk: x > - 1 ; bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_3(x+1)-\dfrac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)}{x-6}<0 \Leftrightarrow 0<x<6$

74/ Giải phương trình: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

Giải : Đặt $t=\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}$ > 0. (2) $\Leftrightarrow$ $x=3$

75/ Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\log_4(x^2+y^2)-\log_4(2x)+1=\log_4(x+3y)\\ \log_4(xy+1)-\log_4(4y^2+2y-2x+4)=\log_4\left(\dfrac{x}{y}\right)-1\end{cases}$$

Giải : $\begin{cases}x=\alpha\\ y=\alpha\end{cases}$ *với* $\alpha>0$ *tuỳ ý và* $\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$

76/ Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+10}\geq\sqrt{5x+10}-\sqrt{x-2}$ (1)

Giải: Điều kiện: $x\geq 2$

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{2x+10}+\sqrt{x-2}\geq\sqrt{5x+10} \quad \Leftrightarrow\sqrt{2x^2+6x-20}\geq x+1(2)$

Khi $x\geq 2$ => x+1>0 bình phương 2 vế phương trình (2)

$(2)\Leftrightarrow 2x^2+6x-20\geq x^2+2x+1 \quad \Leftrightarrow x^2+4x-11\geq 0 \quad \Leftrightarrow x\in(-\infty;-7]\cup[3;+\infty)$

Kết hợp điều kiện vậy nghiệm của bất phương trình là: $x\geq 3$

77/ Giải phương trình:

$$\log_2(x+2)+\log_4(x-5)^2+\log_{\frac{1}{2}}8=0$$

Giải: . Điều kiện: $x>-2$ và $x\neq 5$ (*)

Với điều kiện đó, ta có phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$$\log_2\left[(x+2)|x-5|\ \right]=\log_2 8 \;\Leftrightarrow\; (x+2)|x-5|=8 \Leftrightarrow\; (x^2-3x-18)(x^2-3x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x-18=0\\ x^2-3x-2=0\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; x=-3;\ x=6;\ x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $x=6$ và $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{2}$

78/ Giải phương trình:

$$log_{\frac{x}{2}}x^2-14log_{16x}x^3+40log_{4x}\sqrt{x}=0.$$

Giải: Giải phương trình $3-4sin^2 2x=2cos2x(1+2sinx)$

Biến đổi phương trình về dạng $2sin3x(2sinx+1)-(2sinx+1)=0$

- Do đó nghiệm của phương trình là

$x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{7\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}; x=\dfrac{5\pi}{18}+\dfrac{k2\pi}{3}$

Giải phương trình $log_{\frac{x}{2}}x^2-14log_{16x}x^3+40log_{4x}\sqrt{x}=0.$

- Điều kiện: $x>0; x\neq 2; x\neq\dfrac{1}{4}; x\neq\dfrac{1}{16}$.

- Dễ thấy x = 1 là một nghiệm của pt đã cho Với $x \neq 1$. Đặt $t = log_x 2$ và biến đổi phương trình về dạng

$\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0$, Giải ra ta được $t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy pt có 3 nghiệm x =1; $x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

79 / Giải phương trình

$$3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^x - \frac{1}{4}.9^{x+1}.$$

Giải: Giải phương trình $3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^x - \frac{1}{4}.9^{x+1}$ Biến đổi phương trình đã cho về dạng

$3.2^{2x} + 27.3^{2x} = 6.2^{2x} - \frac{9}{4}.3^{2x}$ Từ đó ta thu được $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow x = log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{39}}$

80/ Cho hàm số $f(x) = e^x - \sin x + \frac{x^2}{2} - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ và chứng minh rằng $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm.

Giải: Ta có $f'(x) = e^x + x - cos\,x$. Do đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = -x + cos\,x$. Hàm số $y = e^x$ là hàm đồng biến; hàm số $y = -x + cosx$ là hàm nghịch biến vì $y' = -1 + sin\,x \leq 0, \forall x$. Mặt khác $x = 0$ là nghiệm của phương trình $e^x = -x + cos\,x$ nên nó là nghiệm duy nhất. Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ (học sinh tự làm) ta đi đến kết luận phương trình $f(x) = 0$ có đúng hai nghiệm.

Từ bảng biến thiên ta có $min\, f(x) = -2 \Leftrightarrow x = 0.$

81/ 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

2) Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} \log_5\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Giải:

1)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \quad (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \quad (2) \end{cases} \qquad (dk\ x + y > 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \frac{2xy}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy - (x+y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^2 - 1\right) - 2xy(x+y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)(x+y+1) - 2xy\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+y=1 & (3) \\ x^2+y^2+x+y=0 & (4) \end{array}\right.$$

Dễ thấy (4) vô nghiệm vì x+y>0

Thế (3) vào (2) ta được $x^2 - y = 1$ Giải hệ $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 0 \\ x = -2; y = 3 \end{array}\right.$ ……

2) $\log_{\frac{1}{3}} \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ (1)

Đk: $x > 0$;

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right) + \log_3 \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right) < 0 \Leftrightarrow \log_5^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1$$

*) $0 < \log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \Leftrightarrow x > 0$

*) $\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < 5 - x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < \frac{12}{5}$

Vậy BPT có nghiệm $x \in \left(0; \frac{12}{5}\right)$

Đề 87.

1. Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-x-2} + 3\sqrt{x} \le \sqrt{5x^2-4x-6}$ (x ∈ R).

Giải:Điều kiện $\begin{cases} x^2-x-2 \ge 0 \\ x \ge 0 \\ 5x^2-4x-6 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 2$;Bình phương hai vế ta được $6\sqrt{x(x+1)(x-2)} \le 4x^2 - 12x - 4$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x(x+1)(x-2)} \le 2x(x-2) - 2(x+1)$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}} \le 2\frac{x(x-2)}{x+1} - 2$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}} \ge 0$ ta được bpt $2t^2 - 3t - 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le \frac{-1}{2} \\ t \ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow t \ge 2$ (do $t \ge 0$)

Với $t \ge 2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x(x-2)}{x+1}} \ge 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le 3 - \sqrt{13} \\ x \ge 3 + \sqrt{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \ge 3 + \sqrt{13}$

(do $x \ge 2$) Vậy bpt có nghiệm $x \ge 3 + \sqrt{13}$

82/ Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} y - x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(y-x)+\log_4\dfrac{1}{y}=-1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4\dfrac{y-x}{y}=-1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-x}{y}=\dfrac{1}{4} \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 9y^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y^2=\dfrac{25}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y)=\left(\dfrac{15}{\sqrt{10}};\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \\ (x;y)=\left(-\dfrac{15}{\sqrt{10}};-\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \end{array}\right. \text{ (loại)}$$

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

83/ Giải hpt :

$$\begin{cases} 4xy+4((x+y)^2-2xy))+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases}$$

Giải:

$$\begin{cases} 4xy+4((x+y)^2-2xy))+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+y)^2-4xy+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+((x+y)^2-4xy)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+(x^2+y^2-2xy)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}+(x-y)^2=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\left[(x+y)^2+\dfrac{1}{(x+y)^2}\right]+(x-y)^2=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+(x-y)=3 \end{cases}$$

84/ 1. Giải bất phương trình : $2\log(x^3+8)\le 2\log(x+58)+\log(x^2+4x+4)$.

2. Giải pt : $\sqrt{3^x-5}+\sqrt{10-3^x}-\sqrt{15.3^x-50-9^x}=1$

Giải:1. Đk : $\begin{cases} x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)>0 \\ x+58>0 \\ x^2+4x+4=(x+2)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-2$

Bpt đã cho $\Leftrightarrow \log(x^3+8)\le\log((x+58)(x+2)) \Leftrightarrow (x+2)\left[x^2-3x-54\right]\le 0$

$\Leftrightarrow x\le -6; -2\le x\le 9$ (0.25) *.So dk, ta co* $:-2<x\le 9$ (0.25)

2.Giải pt : $\sqrt{3^x-5}+\sqrt{10-3^x}-\sqrt{15.3^x-50-9^x}=1$

Đặt : $t=\sqrt{3^x-5}+\sqrt{10-3^x}$ $(t\ge 0)\Rightarrow t^2=5+2\sqrt{15.3^x-50-9^x}$

Ta có pt : $t^2-2t-3=0$ (0.25) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3(nhan) \\ t=-1(loai) \end{array}\right.$

$t=3 \Leftrightarrow \sqrt{3^x-5}+\sqrt{10-3^x}=3.\quad Dat: y=3^x (y>0).$

$Ta\ co\ pt: 9=5+2\sqrt{15.y-50-y^2} \Leftrightarrow \sqrt{15.y-50-y^2}=2$

$\Leftrightarrow y^2-15y+54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=9 \\ y=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=9 \\ 3^x=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\log_3 6 \end{array}\right.$

85/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$

Giải: Hệ phương trình $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases}$

ĐK $\begin{cases} -4<x<1, x\neq 0 \\ y>-2; y\neq -1 \end{cases}$

Đưa phương trình thứ nhất của hệ về dạng $\log_{1-x}(2+y)+\log_{2+y}(1-x)=2$

Đặt $t=\log_{1-x}(2+y)$, Tìm được T=1, kết hợp với phương trình thứ hai của hệ, đối chiếu với điều kiện trên, tìm được nghiệm $(x;y)=(-2;1)$.

86/ Giai3 phuong trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2 4x$.

87/ 1/.Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 (1) \\ 4x^2y+6x=y^2 \quad (2) \end{cases}$

Giải: hệ phương trình: $\begin{cases} 8x^3y^3+27=18y^3 (1) \\ 4x^2y+6x=y^2 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow y\neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3+\frac{27}{y^3}=18 \\ \frac{4x^2}{y}+\frac{6x}{y^2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3+\left(\frac{3}{y}\right)^3=18 \\ 2x.\frac{3}{y}\left(2x+\frac{3}{y}\right)=3 \end{cases}$

Đặt a = 2x; b = $\frac{3}{y}$. Ta có hệ: $\begin{cases} a^3+b^3=18 \\ ab(a+b)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=1 \end{cases}$

$\rightarrow$ Hệ đã cho có 2 nghiệm $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{6}{3+\sqrt{5}}\right),\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4};\frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$

88/ Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$(m-3)\sqrt{x}+(2-m)x+3-m=0.\ (1)$

Giải: Tìm các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm thực:

$(m-3)\sqrt{x}+(2-m)x+3-m=0.\ (1)$

Đk $x\geq 0$. đặt $t=\sqrt{x}; t\geq 0$

(1) trở thành $(m-3)t+(2-m)t^2+3-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{2t^2-3t+3}{t^2-t+1}$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\frac{2t^2-3t+3}{t^2-t+1}$ $(t\geq 0)$

Lập bảng biến thiên

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t $\ge 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3} \le m \le 3$

89/ Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

Giải:_Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

ĐK : $x>\frac{1}{3}$. (*)

Với điều kiện trên phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2+1=3\log_5(2x+1)$

$$\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2=\log_5(2x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow 5(3x-1)^2=(2x+1)^3$$

$\Leftrightarrow 8x^3-33x^2+36x-4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

Đối chiếu với điều kiện trên ta được nghiệm của phương trình đã cho là $x=2$.

90/ : Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$.

Giải:

Hệ phuong trình đã cho tương đương với $\begin{cases} (x^2-2)^2+(y-3)^2=4 \\ (x^2+2)y+x^2-22=0 \end{cases}$ $\begin{cases} (x^2-2)^2+(y-3)^2=4 \\ (x^2-2+4)(y-3+3)+x^2-2-20=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-2=u \\ y-3=v \end{cases}$ * Thay vào hệ phương trình ta có $\begin{cases} u^2+v^2=4 \\ u.v+4(u+v)=8 \end{cases}$

$\begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases}$

Thế vào cách đặt ta được các nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$; $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=5 \end{cases}$; $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=5 \end{cases}$;

91/ Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$

Giải: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$

BPT tương đương

$$\sqrt{x^2+35}-\sqrt{x^2+24}<5x-4 \Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24}}<5x-4$$

$\Leftrightarrow 11<(5x-4)(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})$

Xét:

a)Nếu $x \le \frac{4}{5}$ không thỏa mãn BPT

b)Nếu x>4/5: Hàm số $y=(5x-4)(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})$ với x>4/5

$y' = 5(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})+(5x-4)(\frac{1}{\sqrt{x^2+35}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+24}})>0$ mọi $x>4/5$

Vậy HSĐB. +Nếu $4/5<x\le 1$ thì $y(x)\le 11$

+Nếu $x>1$ thì $y(x)>11$ Vậy nghiệm BPT $x>1$

92/ Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+m=0 \end{cases}$ có nghiệm thực

Giải: Điều kiện: $\begin{cases} 1-x^2\ge 0 \\ 2y-y^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$

Đặt $t = x + 1 \Rightarrow t\in[0; 2]$; ta có (1) $\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 = y^3 - 3y^2$.

Hàm số $f(u) = u^3 - 3u^2$ nghịch biến trên đoạn $[0; 2]$ nên:

(1) $\Leftrightarrow t = y \Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow x^2-2\sqrt{1-x^2}+m=0$

Đặt $v=\sqrt{1-x^2} \Rightarrow v\in[0; 1] \Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow v^2 + 2v - 1 = m$.

Hàm số $g(v) = v^2 + 2v - 1$ đạt $\min\limits_{[0;1]} g(v) = -1;\ \max\limits_{[0;1]} g(v) = 2$

Vậy hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 2$

93/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y})=4 \\ \frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases}$.

Giải:

hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y})=4 \\ \frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases}$.

ĐK $y\ne 0$ $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y})=4 \\ \frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+x+\frac{1}{y}=4 \\ x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y}(\frac{1}{y}+x)=4 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a=x+\frac{1}{y} \\ b=\frac{x}{y} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} a^2+a-2b=4 \\ a^3-2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-4=2b \\ a^3-a(a^2+a-4)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-4=2b \\ a^2-4a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} x=y \\ x+\frac{1}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$ KL

94/ Giải phương trình

$\log_3(x^2+5x+6)+\log_3(x^2+9x+20)=1+\log_3 8$

Giải: $\log_3(x^2+5x+6)+\log_3(x^2+9x+20)=1+\log_3 8$ (*)

+ Điều kiện : $\begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x^2+9x+20>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \vee x>-2 \\ x<-5 \vee x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-5 \\ -4<x<-3 \\ x>-2 \end{array}\right.$, và có : $1+\log_3 8=\log_3 24$

+ PT (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left[(x^2+5x+6)(x^2+9x+20)\right]=\log_3 24 \\ (x<-5)\vee(-4<x<-3)\vee(x>-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+5x+6)(x^2+9x+20)=24 \\ (x<-5)\vee(-4<x<-3)\vee(x>-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=24 \ (*) \\ (x<-5)\vee(-4<x<-3)\vee(x>-2) \ (**) \end{cases}$

+ Đặt $t=(x+3)(x+4)=x^2+7x+12 \Rightarrow (x+2)(x+5)=t-2$, PT (*) trở thành :

t(t-2) = 24 $\Leftrightarrow (t-1)^2=25 \Leftrightarrow t=6 \vee t=-4$

- t = 6 : $x^2+7x+12=6 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$ (thỏa đkiện (**))
- t = - 4 : $x^2+7x+12=-4 \Leftrightarrow x^2+7x+16=0$: vô nghiệm

+ Kết luận : PT có hai nghiệm là x = -1 và x = - 6

95/ Cho khai triển $\left(2^{\log_2\sqrt[3]{9^{x-1}+7}}+2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}\right)^8$. Hãy tìm các giá trị của x biết rằng số hạng thứ 6 trong khai triển này là 224

Giải: Ta có : $\left(a+b\right)^8=\sum_{k=0}^{k=8}C_8^k a^{8-k}b^k$ với $a=2^{\log_2\sqrt[3]{9^{x-1}+7}}=\left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}$; $b=2^{-\frac{1}{5}\log_2\left(3^{x-1}+1\right)}=\left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}$

+ Theo thứ tự trong khai triển trên , số hạng thứ sáu tính theo chiều từ trái sang phải của khai triển là

$T_6=C_8^5\left(\left(9^{x-1}+7\right)^{\frac{1}{3}}\right)^3.\left(\left(3^{x-1}+1\right)^{-\frac{1}{5}}\right)^5=56\left(9^{x-1}+7\right).\left(3^{x-1}+1\right)^{-1}$

+ Theo giả thiết ta có : $56\left(9^{x-1}+7\right).\left(3^{x-1}+1\right)^{-1}=224 \Leftrightarrow \frac{9^{x-1}+7}{3^{x-1}+1}=4 \Leftrightarrow 9^{x-1}+7=4(3^{x-1}+1)$

$\Leftrightarrow \left(3^{x-1}\right)^2-4(3^{x-1})+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^{x-1}=1 \\ 3^{x-1}=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$

96/ Giải phương trình $x^{\log_2 9}=x^2.3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3}$

Giải: 1.ĐK: x>0.

Ta có phương trình $x^{\log_2 9}=x^2.3^{\log_2 x}-x^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x}=x^2-1$. Đặt $\log_2 x \Rightarrow x=2^t$.

Phương trình trở thành $3^t=4^t-1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t+\left(\frac{1}{4}\right)^t=1 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \boxed{x=2}$

97/ .1.Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x+xy+y=m+2 \\ x^2y+xy^2=m+1 \end{cases}$$

1) Giải phương trình với m=3

2.Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

Giải: 1. Nhận thấy rằng đây là hệ phương trình đối xứng loại 1, khi đó

đặt $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$, ĐK $S^2 - 4P \geq 0$

ViẾT lại hệ phương trình dưới dạng $\begin{cases} (x+y) + xy = m+2 \\ (x+y)xy = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = m+2 \\ SP = m+1 \end{cases}$ (I)

Khi đó S,P là nghiệm của phương trình bậc 2

$$t^2 - (m+2)t + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m+1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = m+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = m+1 \\ xy = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(u) = u^2 - u + m + 1 (1) \\ g(u) = u^2 - (m+1)u + 1 (2) \end{array}\right.$$

Với m=-3. ta có

$$(1) \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \\ u = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1; y = 2 \\ x = 2; y = -1 \end{array}\right.$$

$$(2) \Leftrightarrow u^2 + u + 1 = 0 \Leftrightarrow u = -1 \Leftrightarrow x = y = -1$$

Vậy với m=3, hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(-1;2),(2;-1),(-1;-1)$.

2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4xy + 4(x^2 + y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = 3 \end{cases}$

ĐK: $x + y \neq 0$

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2 + (x-y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = 7 \\ x + y + \dfrac{1}{x+y} + x - y = 3 \end{cases}$

Đặt $u = x + y + \dfrac{1}{x+y}$ ($|u| \geq 2$) ; $v = x - y$ ta được hệ : $\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 13 \\ u + v = 3 \end{cases}$

Giải hệ ta được u = 2, v = 1 do ($|u| \geq 2$)

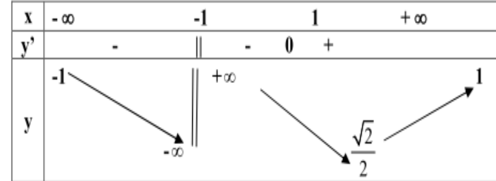
Từ đó giải hệ $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

98/ 1. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x^2+1} > \log_{\frac{1}{3}}(ax+a)$

2.Gải phương trình: $\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x} + x.\left(\sqrt{3}-1\right)^{\log_2 x} = 1+x^2$

Giải:1 ĐK: ax + a > 0 ; Bpt tương đương $\sqrt{x^2+1} < a(x+1)$

Nếu a>0 thì X+1>0, ta có $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} < a$



Nếu a<0 thì X+1<0, ta có $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} > a$

Xét hàm số y= $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ với x $\neq$ - 1

y' = $\dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$ =0 khi x=1 => a> $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc a < - 1

2 Điều kiện : x>0

Đặt $\left(\sqrt{3}+1\right)^{\log_2 x}$ =u, $\left(\sqrt{3}-1\right)^{\log_2 x} = v$ ta có phương trình u +uv^2 = 1 + u^2 v^2

$\Leftrightarrow$ (uv^2-1)(u – 1) = 0

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ uv^2=1 \end{array}\right.$ . . . x =1

99/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Giải: hệ phương trình: $\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 & (1) \\ (x+y)(x^2-y^2)=25 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+xy^2-x^2y-y^3=13 & (1') \\ y^3-xy^2+x^2y-x^3=25 & (2') \end{cases}$

LÊy (2') - (1') ta ®-îc : x^2 y– xy^2 = 6 $\Leftrightarrow (x-y)xy=6$ (3)

KÕt hîp víi (1) ta cã :

$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=13 \\ (x-y)xy=6 \end{cases}$ (I). §Æt y = - z ta cã :

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)(x^2+z^2)=13 \\ -(x+z)xz=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+z)\left[(x+z)^2-2xz\right]=13 \\ (x+z)xz=-6 \end{cases}$

Đặt S = x +z Và P = x.z ta có :

$$\begin{cases} S\left(S^2-2P\right)=13 \\ SP=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3-2SP=13 \\ SP=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases} x+z=1 \\ x.z=-6 \end{cases}$. hệ này có nghiệm $\begin{cases} x=3 \\ z=-2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ z=3 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm là: (3 ; 2) và (-2 ; -3)

Đề 106. a) Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x-4))\le 1$

Giải:a) Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x-4))\le 1$

$\log_x(\log_4(2^x-4))\le 1$. Đk: $\begin{cases} 0<x\ne 1 \\ \log_4(2^x-4)>0 \Leftrightarrow x>\log_2 5 \\ 2^x-4>0 \end{cases}$

Do $x>1 \Rightarrow$ PT $\Leftrightarrow \log_4(2^x-4)\le x \Leftrightarrow 2^x-4\le 4^x \Leftrightarrow 4^x-2^x+4\ge 0$ đúng với mọi x. Do vậy BPT có nghiệm: $x>\log_2 5$

Đề 107. Tìm m để phương trình sau có một nghiệm thực:

$$\sqrt{2x^2-2(m+4)x+5m+10}-x+3=0$$

Giải: $\sqrt{2x^2-2(m+4)x+5m+10}-x+3=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-2(m+4)x+5m+10}=x-3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3\ge 0 \\ 2x^2-2(m+4)x+5m+10=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3 \\ m=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-5} \end{cases}$$

Xét hàm số, lập BBT với $f(x)=\dfrac{x^2-2x+1}{2x-5} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2(x^2-5x)}{(2x-5)^2}$

Khi đó ta có:

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		5/2		3	5		$+\infty$
y’		+	0	-	||	-	0		+	
y					||		8	24/5		$+\infty$

Phương trình có 1 nghiệm $m\in\left\{\dfrac{24}{5}\right\}\cup(8;+\infty)$

100/ Tìm m để phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ (2) có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$

Giải: Tìm m để phương trình: $m\left(\sqrt{x^2-2x+2}+1\right)+x(2-x)\le 0$ (2) có nghiệm $x\in\left[0;1+\sqrt{3}\right]$

Đặt $t=\sqrt{x^2-2x+2} \Leftrightarrow t^2-2=x^2-2x$ Bpt (2) $\Leftrightarrow m\le\dfrac{t^2-2}{t+1}$ $(1\le t\le 2)$, do $x\in[0;1+\sqrt{3}]$

Khảo sát $g(t)=\dfrac{t^2-2}{t+1}$ với $1\le t\le 2$; $g'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0$. Vậy g tăng trên [1,2]

Do đó, ycbt $\Leftrightarrow$ bpt $m \le \dfrac{t^2-2}{t+1}$ có nghiệm $t \in [1,2]$ $\Leftrightarrow$ $m \le \max\limits_{t\in[1;2]} g(t) = g(2) = \dfrac{2}{3}$ Vậy $m \le \dfrac{2}{3}$

101/ . 1) Giải phương trình: $\log_3\left(x^2+x+1\right)-\log_3 x = 2x - x^2$

2) Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2)\log_2\sqrt{2x} \ge 0$

Giải:

1. $(1) \Leftrightarrow \log_3\dfrac{x^2+x+1}{x} = x\left(2-x\right) \Leftrightarrow 3^{x(2-x)} = x+1+\dfrac{1}{x}$

Đặt:f(x)= $3^{x(2-x)}$; g(x)= $x+1+\dfrac{1}{x}$ $(x \ne 0)$

Dùng pp kshs =>max f(x)=3; min g(x)=3=>PT f(x)= g(x) $\Leftrightarrow$ max f(x)= min g(x)=3 tại x=1 =>PT có nghiệm x= 1

2. Điều kiện $x > 0$, $x \ne 1$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_8 x} + 2\log_4 x\right)\frac{1}{2}\log_2 2x \ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{3}\log_2 x} + \log_2 x\right)\left(\log_2 x + 1\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2 x + 3)\left(\frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \le -1 \text{ hay } \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{2} \text{ hay } x > 1$$

102/ Giải phương trình: $3^{x^2} 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

Giải: Giải phương trình: $3^{x^2} 2^{\frac{x}{2x-1}} = 6$

Lấy logarit theo cơ số 3 cho hai vế ta được: $x^2 + \dfrac{x}{2x-1}\log_3 2 = 1 + \log_3 2$

Đưa phương trình về dạng: $(x-1)(2x^2 + x - 1 - \log_3 2) = 0$.

Từ đó suy ra nghiệm $x = 1$; $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9 + 8\log_3 2}}{4}$

103/ .Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

Giải: Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_4 x^2 - 3)$

ĐK: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3 \ge 0 \end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x^2 - 3} > \sqrt{5}(\log_2 x - 3)$ (1)

đặt $t = \log_2 x$,

BPT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ \begin{cases} t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \dfrac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right.$ Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là: $(0;\frac{1}{2}] \cup (8;16)$

104/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

Giải: hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)(y-1)(x+y-2) = 6 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(y-1)(x-1+y-1) = 6 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ u^2 + v^2 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 6 \\ (u+v)^2 - 2uv - 5 = 0 \end{cases}$ với $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} S = u+v \\ P = u.v \end{cases}$ được $\begin{cases} P.S = 6 \\ S^2 - 2P - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$

u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2 \\ y-1 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 = 1 \\ y-1 = 2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ: (3 ; 2), (2 ; 3)

105/ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $4^x - 4m(2^x - 1) = 0$

2.Tìm m để phương trình: $4\left(\log_2 \sqrt{x}\right)^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm trong khỏang (0 ; 1).

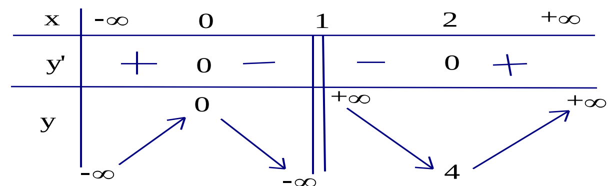
Giải:

1. Đặt $t = 2^x$ $(t > 0)$ ta có phương trình: $t^2 - 4mt + 4m = 0$ (*)

(*) $\Leftrightarrow \dfrac{t^2}{t-1} = 4m \quad (t > 0 \wedge t \ne 1)$

Xét $y = \dfrac{t^2}{t-1}$ có $y' = \dfrac{t^2 - 2t}{(t=1)^2}$

y' = 0 $\Leftrightarrow t = 0 \vee t = 2$



Từ bảng biến thiên ta có : m < 0 $\vee\ m \ge 1$

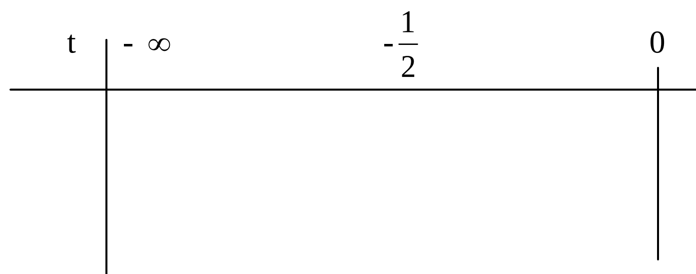
2. Pt đã cho $\Leftrightarrow 4\left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \log_2 x + m = 0 \quad \forall x \in (0\,;1) \Leftrightarrow \log_2^2 x + \log_2 x + m = 0$ (*)

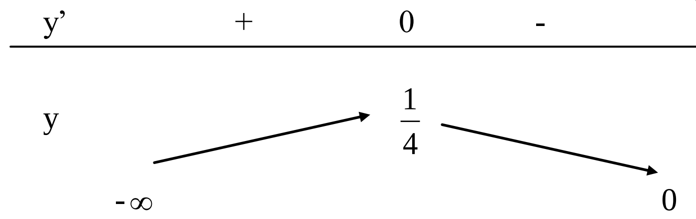
Đặt $t = \log_2 x$, $x \in (0\,;1) \Rightarrow t \in (-\infty\,;0)$

(*) $\Leftrightarrow t^2 + t + m = 0 \Leftrightarrow m = -t^2 - t \quad \forall t \in (-\infty\,;0)$

Xét hàm số $y = -t^2 - t$ có $y' = -2t - 1$

y' = 0 $\Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}, y = \dfrac{1}{4}$





ĐS : $m \le \frac{1}{4}$

106/ Giải bất phương trình $(4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \ge 8x-6$

Giải:

bất phương trình: $(4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \ge 8x-6 \; (1)$

$$(1) \Leftrightarrow (4x-3)\left(\sqrt{x^2-3x+4}-2\right) \ge 0$$

Ta có: 4x-3=0<=>x=3/4

$\sqrt{x^2-3x+4}-2$=0<=>x=0;x=3

Bảng xét dấu:

x	-∞		0		¾		2		+ ∞
4x-3		-		-	0	+		+	
$\sqrt{x^2-3x+4}-2$		+	0	-		-	0	+	
Vế trái		-	0	+	0	-	0	+	

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in \left[0;\frac{3}{4}\right] \cup [3;+\infty)$

107 / Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$.

Giải: phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$.

$$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x).$$

Điều kiện: $\begin{cases} x>-3 \\ x \ne 1 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \ne 1.$ Biến đổi theo logarit cơ số 2 thành phương trình

$$\log_2\left[(x+3)(x-1)\right] = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \;\; (\text{loại}) \\ x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3.$$

108/ Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm duy nhất thuộc đoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$:

$$3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1} = m \quad (m \in R).$$

Giải:Đặt $f(x) = 3\sqrt{1-x^2}-2\sqrt{x^3+2x^2+1}$, suy ra $f(x)$ xác định và liên tục trênđoạn $\left[-\frac{1}{2};1\right]$.

$$f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3x^2+4x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} = -x\left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}}\right).$$

$\forall x \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$ ta có $x > -\frac{4}{3} \Rightarrow 3x+4>0 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3x+4}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} > 0$.

Vậy: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{1}{2}$		0		1
$f'(x)$	||	+	0	−	||
$f(x)$	$\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$	↗	1 CĐ	↘	-4

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: Phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất thuộc $\left[-\frac{1}{2};1\right] \Leftrightarrow -4 \le m < \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{22}}{2}$ hoặc $m=1$.

109/ 1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$

Giải:1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

điều kiện x>0, y>0. Khi đó hệ tương đương $\begin{cases} 3x^2y = y^2+2 \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình ta được: (x-y)(3xy+x+y) = 0 $\Leftrightarrow x=y$ thay lại phương trình Giải tìm được nghiệm của hệ là: (1;1).

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$

Tập xác định: D = R. Đặt f(x) = $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}$

Ta có: $f'(x)=\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}}+\frac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}>0; \forall x \ne -\frac{1}{2},-1,-\frac{3}{2}$

Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên tập M= $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$

Ta thấy f(-1)=0 $\Rightarrow$ x=-1 là một nghiệm của (1). Ta có: $f(-\frac{1}{2})=3;\ f(-\frac{3}{2})=-3$

Ta có bảng biến thiên của hàm số f(x):

x	-∞		$-\frac{3}{2}$		-1		$-\frac{1}{2}$		+∞
f'(x)			||		||		||		
F(x)	-∞		-3	↗	0	↗	3	↗	+∞

Từ bảng biến thiên ta thấy f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = -1. Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm x = -1.

Cách 2: Hs có thể đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{2x+1} \\ v=\sqrt[3]{2x+3} \end{cases}$ khi đó ta được hệ $\begin{cases} u+v+\dfrac{u^3+v^3}{2}=0 \\ v^3-u^3=2 \end{cases}$ giải hệ này và tìm được nghiệm.

110/ Giaûi phöông trình : $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ $(x \in R)$

Giải: $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$, ñieàu kieän : $6-5x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \dfrac{6}{5}$

Ñaët t = $\sqrt[3]{3x-2}$ $\Leftrightarrow t^3=3x-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{t^3+2}{3}$ vaø $6-5x=\dfrac{8-5t^3}{3}$

Phöông trình trôû thaønh : $2t+3\sqrt{\dfrac{8-5t^3}{3}}-8=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{8-5t^3}{3}}=8-2t \Leftrightarrow \begin{cases} t\le 4 \\ 15t^3+4t^2-32t+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ t = -2. Vaäy x = -2

111/ Gæai heä phöông trình : $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=1+\log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2}=81 \end{cases}$ $(x,\ y \in R)$

Giải: Ñieàu kieän x, y > 0 $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=\log_2 2+\log_2(xy)=\log_2(2xy) \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

112/ Tìm các giá trị của tham số *m* sao cho hệ phương trình $\begin{cases} 2y-x=m \\ y+\sqrt{xy}=1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Giải Ta có : $x=2y-m$, nên : $\sqrt{2y^2-my}=1-y$. PT$\Leftrightarrow \begin{cases} y\le 1 \\ m=y-\dfrac{1}{y}+2 \end{cases}$ (vì y = 0 PTVN). Xét

$f(y)=y-\dfrac{1}{y}+2 \Rightarrow f'(y)=1+\dfrac{1}{y^2}>0$. Lập BTT. KL: Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m>2$.

113/ 1. Giải phương trình $2x^{\log_4 x}=8^{\log_2\sqrt{x}}$.

2. Giải bất phương trình $2(1+\log_2 x)\log_4 x+\log_8 x<0$.

Giải 1. ĐK : $x>0$. Ta có: $1+\log_2 x\log_4 x=3\log_2\sqrt{x}$. Đặt $t=\log_2 x$.Ta có: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow t=1, t=2$. Khi: $t=1$ thì $\log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2(th)$. Khi: $t=2$ thì $\log_2 x=2 \Leftrightarrow x=4(th)$. KL: Nghiệm PT $x=2, x=4$.

2. ĐK : $x>0$. Đặt $t=\log_2 x$, ta có : $(1+t)t+\dfrac{t}{3}<0$, BPT $\Leftrightarrow 3t^2+4t<0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}<t<0$. KL: $-\dfrac{4}{3}<\log_2 x<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}<x<1$.

114/ Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{(x-1)(4-x)}}{\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+2}>\dfrac{2x}{\sqrt{x+2}}$

Giải

ĐK:? bpt $\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+3x+4} > x-2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2 \\ x \in (0;7) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2 \\ x \in [-1;4] \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \left[-1; \frac{7}{2}\right)$

115/ Giải phương trình: $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1}-1}$

Giải : $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1}-1}$ Đặt $2^x = u > 0; \sqrt[3]{2^{x+1}-1} = v$

$\Rightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ v^3+1=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v>0 \\ u^3-2u+1=0 \end{cases} \Rightarrow x=0; x=\log_2\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

116/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y})=4 \\ \frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases}.$

Giải : ĐK $y \ne 0$ $\begin{cases} x^2+x+\frac{1}{y}(1+\frac{1}{y})=4 \\ \frac{x}{y^2}+\frac{x^2}{y}+\frac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{1}{y^2}+x+\frac{1}{y}=4 \\ x^3+\frac{1}{y^3}+\frac{x}{y}(\frac{1}{y}+x)=4 \end{cases}$ Đặt $\begin{cases} a=x+\frac{1}{y} \\ b=\frac{x}{y} \end{cases}$

Ta có $\begin{cases} a^2+a-2b=4 \\ a^3-2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-4=2b \\ a^3-a(a^2+a-4)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-4=2b \\ a^2-4a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} x=y \\ x+\frac{1}{x}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1 \end{cases}$

117/ Giải hệ phương trình: $\sqrt[3]{9^x-5.3^x-14}.\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \ge 0$

Giải:

KL:2. +) Đ/K: x>2 or x<-1

$\sqrt[3]{9^x-5.3^x-14}.\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{\left(3^x-7\right)\left(3^x+2\right)}\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(3^x-7\right)\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \ge 0$

Xét x>2 ta có $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-2}\right) \ge 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \ge 0 \Leftrightarrow x > 2$

Xét x<-1 ta có $\log_{\sqrt{3}}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \le 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x-2} \le 0 \Leftrightarrow x < 2$. KL:?

118 / Giải phương trình : $4^x - 2^{x+1} + 2\left(2^x - 1\right)\sin\left(2^x + y - 1\right) + 2 = 0$

Giải: Đặt $2^x = t$, đ ưa về pt bậc 2 ẩn t ,giải tiếp. Hoặc đưa pt về dạng tổng các bình phương

119/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực : $\sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{-x^2+2mx+2m}$

Giải Tìm m để phương trình sau có nghiệm thực : $\sqrt{-x^2+3x-2} = \sqrt{-x^2+2mx+2m}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+3x-2 \ge 0 \\ -x^2+3x-2 = -x^2+2mx+2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 2m(x+1) = 3x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ f(x) = \dfrac{3x-2}{x+1} = 2m \end{cases}$$

$f(x)$ liên tục trên $[1;2]$ và có $f'(x) = \dfrac{5}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [1;2] \Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[1;2]$

Bài toán yêu cầu $\Leftrightarrow f(1) \le 2m \le f(2) \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{1}{4} \le m \le \dfrac{2}{3}}$

120/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x = (y-x)\left(x^2 - xy + y^2\right) \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x > 0$; $y > 0$. Ta có : $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 > 0 \quad \forall x, y > 0$; Xét $x > y$

$\Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x < \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} \text{VT}(*) > 0 \\ \text{VP}(*) < 0 \end{cases} \Rightarrow$ (*) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Xét $x < y \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x > \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} y \Rightarrow \begin{cases} \text{VT}(*) < 0 \\ \text{VP}(*) > 0 \end{cases} \Rightarrow$ (*) vô nghiệm nên hệ vô nghiệm.

Khi $x = y$ hệ cho ta $\begin{cases} 0 = 0 \\ 2x^2 = 2y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt{2}$ (do $x, y > 0$). Vậy hệ có ngd nh $(x;y) = \left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$

Vậy hệ có ngd

121/ Giải phương trình: $(x+24)^{\frac{1}{3}} + (12-x)^{\frac{1}{2}} = 6$.

Giải; *Nhận xét:* Theo định nghĩa của lũy thừa số mũ hữu tỉ, cơ số phải dương nên điều kiện có nghĩa của biểu thức là: $\begin{cases} x + 24 > 0 \\ 12 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -24 < x < 12$.

Đặt: $u = (x+24)^{\frac{1}{3}}$; $v = (12-x)^{\frac{1}{2}}$ với $u, v > 0$.

Ta có: $\begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + v^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + (6-u)^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u^3 + u^2 - 12u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 6 \\ u(u^2 + u - 12) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = 3 \end{cases} \text{ (do u, v > 0)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+24)^{\frac{1}{3}} = 3 \\ (12-x)^{\frac{1}{2}} = 3 \\ -24 < x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+24 = 27 \\ 12 - x = 9 \\ -24 < x < 12 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa)}$$

122/ Giải phương trình $\log_3(x^2+5x+6) + \log_3(x^2+9x+20) = 1 + \log_3 8$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x^2+9x+20>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \vee x>-2 \\ x<-5 \vee x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-5 \\ -4<x<-3 \\ x>-2 \end{array}\right.$, và có : $1+\log_3 8 = \log_3 24$

+ PT (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left[(x^2+5x+6)(x^2+9x+20)\right] = \log_3 24 \\ (x<-5) \vee (-4<x<-3) \vee (x>-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+5x+6)(x^2+9x+20) = 24 \\ (x<-5) \vee (-4<x<-3) \vee (x>-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 24 \ (*) \\ (x<-5) \vee (-4<x<-3) \vee (x>-2) \ (**) \end{cases}$

+ Đặt $t = (x+3)(x+4) = x^2+7x+12 \Rightarrow (x+2)(x+5) = t-2$, PT (*) trở thành :

$t(t-2) = 24 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -4$

- $t = 6$: $x^2+7x+12 = 6 \Leftrightarrow x^2+7x+6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$ (thỏa đkiện (**))
- $t = -4$: $x^2+7x+12 = -4 \Leftrightarrow x^2+7x+16 = 0$: vô nghiệm

+ Kết luận : PT có hai nghiệm là x = -1 và x = - 6

123/ Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y+1} + 1 = 4(x+y)^2 + \sqrt{3}.\sqrt{x+y} \\ 2x - y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Giải: Đặt : t = x + y ; ĐK: $t \geq 0$ =>

$$\Leftrightarrow \frac{1-2t}{\sqrt{t+1}+\sqrt{3t}} = (2t-1)(2t+1) \Leftrightarrow (1-2t)\left[\frac{1}{\sqrt{t+1}+\sqrt{3t}} + 2t + 1\right] = 0$$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$; Hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x+y = \frac{1}{2} \\ 2x-y = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có một nghiệm $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{6} \end{cases}$

Đề 132 : Giải phương trình:

$$(9^x - 2.3^x - 3)\log_3(x-1) + \log_{\frac{1}{3}} 27 = \frac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}} - 9^x$$

Giải: ĐK: x > 1; Với ĐK trên phương trình đã cho tương đương

$$(9^x - 2.3^x - 3)\log_3(x-1) - 3 = 2.3^x - 9^x$$

$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1)[\log_3(x-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1)\log_3(x-1) - 3 - 2.3^x + 9^x = 0$

$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1)\log_3(x-1) + (3^x + 1)(3^x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow (3^x - 3)(3^x + 1)[\log_3(x-1)+1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 3 = 0 \\ \log_3(x-1)+1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1\ (loại) \\ x = \frac{4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm : $x = \frac{4}{3}$

124/ Giải bất phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2} \le x + \sqrt{x^2-16} - 6$

Giải : * Đk: $\begin{cases} x+4 \ge 0 \\ x-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ x ≥ 4. Đặt t = $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}$ (t > 0)

BPT trở thành: $t^2 - t - 6 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -2(L) \\ t \ge 3 \end{array}\right.$

* Với t ≥ 3 $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-16} \ge 9 - 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4 \\ 9 - 2x \le 0 \end{cases} \quad (a) \\ \begin{cases} x \ge 4 \\ 9 - 2x > 0 \\ 4(x^2-16) \ge (9-2x)^2 \end{cases} \quad (b) \end{array}\right.$

* (a) $\Leftrightarrow x \ge \frac{9}{2}$. * (b) $\Leftrightarrow \frac{145}{36} \le x < \frac{9}{2}$. *Tập nghiệm của BPT là: T= $\left[\frac{145}{36}; +\infty\right)$

125/ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \end{cases}$

2. Giải phương trình: $9^x + (x - 12).3^x + 11 - x = 0$

Giải 1) *Giải hệ:* $\begin{cases} |xy-18| = 12 - x^2 \Rightarrow 12 - x^2 \ge 0 \Rightarrow |x| \le 2\sqrt{3} \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \Rightarrow |x||y| \ge 2\sqrt{3}|y| \Rightarrow |x| \ge 2\sqrt{3} \end{cases}$

$\Rightarrow |x| = 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = 18$

$\Rightarrow x \in \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$, tương ứng y $\in \{-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\}$

Thử lại, thoả mãn hệ đã cho

Vậy, $(x;y) \in \{(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}), (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})\}$

2) *Giải phương trình*: $(3^x)^2 + (x-12)3^x + 11 - x = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 11 - x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f(x) = 3^x + x - 11 = 0 (*) \end{array}\right.$ (a + b + c = 0)

$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3^x \ln 3 + 1 > 0, \forall x \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $x = 2$

Vậy, tập nghiệm của phương trình: S = {0 ; 2

126/ Giải phương trình: $(x^2+1)^2 = 5 - x\sqrt{2x^2+4};\quad x \in R$

Giải: $\left(x^2+1\right)^2=5-x\sqrt{2x^2+4};\quad x\in R$

Đặt $t=x\sqrt{2x^2+4}\Rightarrow t^2=2(x^4+2x^2)$ ta được phương trình $\dfrac{t^2}{2}+1=5-t\Leftrightarrow t^2+2t-8=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-4\\t=2\end{array}\right.$$

+ Với t = -4 Ta có $x\sqrt{2x^2+4}=-4\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\2(x^4+2x^2)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^4+2x^2-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0\\x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow x=-\sqrt{2}$

+ Với t = 2 ta có

$x\sqrt{2x^2+4}=2\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\2(x^4+2x^2)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^4+2x^2-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x^2=\sqrt{3}-1\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$

ĐS: phương trình có 2 nghiệm $x=-\sqrt{2},x=\sqrt{\sqrt{3}-1}$

127/ Giải bất phương trình: $\dfrac{\left(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x+1}\right)^2-\dfrac{3}{2}\log_2\left(x+1\right)-6}{2+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)}\ge\log_2\left(x+1\right)$

Giải; Đ ặt $\log_2\left(x+1\right)=t$ rồi giải tiếp

128/ Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}}=\sqrt{3-2x-x^2}\qquad(x\in\mathbb{R})$

Giải

$PT\Leftrightarrow\begin{cases}3-2x-x^2\ge0\\7-x^2+x\sqrt{x+5}=3-2x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-2x-x^2\ge0\\x\sqrt{x+5}=-2(x+2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le1\\x\ne0\\\sqrt{x+5}=-2.\dfrac{x+2}{x}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x<0\\\left(x+1\right)\left(x^2-16\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-1;$ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm x = - 1.

129/ Giải hệ phương trình $\begin{cases}\log_{\frac{1}{4}}\left(y-x\right)-\log_4\dfrac{1}{y}=1\\x^2+y^2=25\end{cases}\qquad(x,y\in\mathbb{R})$

Giải: Điều kiện: $\begin{cases}y-x>0\\y>0\end{cases}$; Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_4\left(y-x\right)+\log_4\dfrac{1}{y}=-1\\x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_4\dfrac{y-x}{y}=-1\\x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y-x}{y}=\dfrac{1}{4}\\x^2+y^2=25\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ 9y^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y \\ y^2=\dfrac{25}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y)=\left(\dfrac{15}{\sqrt{10}};\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \\ (x;y)=\left(-\dfrac{15}{\sqrt{10}};-\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \end{array}\right.$$ (không thỏa mãn đk)

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

130/ Tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $m+e^{\frac{x}{2}}=\sqrt[4]{e^{2x}+1}$ có nghiệm thực .

Giải: Đặt $t=e^{\frac{x}{2}}$ ĐK: $t>0$. PT trở thành: $m=\sqrt[4]{t^4+1}-t$ .Xét $f(t)=\sqrt[4]{t^4+1}-t$ với $t>0$.

$f'(t)=\sqrt[4]{\left(\dfrac{t^4}{t^4+1}\right)^3}-1<0 \rightarrow$ hàm số NB trên $(0;+\infty)$. $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{t^4+1}+t\right)\left(\sqrt{t^4+1}+t^2\right)}=0$;

f(0) = 1. KL: 0< m <1.

131/ Giải phương trình: $\log_3\left(4.16^x+12^x\right)=2x+1$.

Giải: PT $\leftrightarrow 4.16^x+12^x=3^{2x+1} \leftrightarrow 4.4^{2x}+4^x.3^x=3.3^{2x}$. Chia 2 vế cho $3^{2x}>0$, ta

có: $4\left(\dfrac{4}{3}\right)^{2x}+\left(\dfrac{4}{3}\right)^x-3=0$; Đặt $t=\left(\dfrac{4}{3}\right)^x$. ĐK: $t>0$; $4t^2+t-3=0 \leftrightarrow t=-1(kth); t=\dfrac{3}{4}(th)$.

Khi $t=\dfrac{3}{4}$, ta có: $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x=\dfrac{3}{4}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^{-1} \leftrightarrow x=-1$.

132/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $|x|\geq|y|$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-y^2}; u\geq 0 \\ v=x+y \end{cases}$; $x=-y$ không thỏa hệ nên xét $x\neq -y$ ta có $y=\dfrac{1}{2}\left(v-\dfrac{u^2}{v}\right)$.

Hệ phương trình đã cho có dạng: $\begin{cases} u+v=12 \\ \dfrac{u}{2}\left(v-\dfrac{u^2}{v}\right)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=3 \\ v=9 \end{cases}$

+ $\begin{cases} u=4 \\ v=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=4 \\ x+y=8 \end{cases}$ **(I)** ; + $\begin{cases} u=3 \\ v=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-y^2}=3 \\ x+y=9 \end{cases}$ **(II)**

Giải hệ (I), (II). Sau đó hợp các kết quả lại, ta được tập nghiệm của hệ phương trình ban đầu là $S=\{(5;3),(5;4)\}$

133/ Giải phương trình: $log_{\frac{x}{2}} x^2-14log_{16x} x^3+40log_{4x}\sqrt{x}=0.$

Giải : phương trình $log_{\frac{x}{2}} x^2-14log_{16x} x^3+40log_{4x}\sqrt{x}=0.$

- Điều kiện: $x > 0; x \neq 2; x \neq \frac{1}{4}; x \neq \frac{1}{16}$. Dễ thấy x = 1 là một nghiệm của pt đã cho;Với $x \neq 1$. Đặt $t = log_x 2$ và biến đổi phương trình về dạng $\frac{2}{1-t} - \frac{42}{4t+1} + \frac{20}{2t+1} = 0$;Giải ra ta được $t = \frac{1}{2}; t = -2 \Rightarrow x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy pt có 3 nghiệm x =1; $x = 4; x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

134/ Giải phương trình $3.4^x + \frac{1}{3}.9^{x+2} = 6.4^x - \frac{1}{4}.9^{x+1}$.

Giải: Biến đổi phương trình đã cho về dạng $3.2^{2x} + 27.3^{2x} = 6.2^{2x} - \frac{9}{4}.3^{2x}$ Từ đó ta thu được

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{2}{\sqrt{39}} \Leftrightarrow x = log_{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{39}}$$

135/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \end{cases}$

Giải:

Hệ: $\begin{cases} |xy - 18| = 12 - x^2 \Rightarrow 12 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 2\sqrt{3} \\ xy = 9 + \frac{1}{3}y^2 \Rightarrow |x||y| \geq 2\sqrt{3}|y| \Rightarrow |x| \geq 2\sqrt{3} \end{cases}$ $; \Rightarrow |x| = 2\sqrt{3} \Rightarrow xy = 18; \Rightarrow x \in \{-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\}$,

tương ứng y $\in \{-3\sqrt{3}; 3\sqrt{3}\}$;Thử lại, thoả mãn hệ đã cho

Vậy, $(x; y) \in \{(-2\sqrt{3}; -3\sqrt{3}), (2\sqrt{3}; 3\sqrt{3})\}$

136/ Giải phương trình: $\log_3\left(4.16^x + 12^x\right) = 2x + 1$.

Giải; PT $\leftrightarrow 4.16^x + 12^x = 3^{2x+1} \leftrightarrow 4.4^{2x} + 4^x.3^x = 3.3^{2x}$ .Chia 2 vế cho $3^{2x} > 0$, ta có $4\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{4}{3}\right)^x - 3 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$. ĐK: $t > 0$; $4t^2 + t - 3 = 0 \leftrightarrow t = -1\,(ktm); t = \frac{3}{4}\ (tm)$. Khi $t = \frac{3}{4}$, ta có:

$\left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{3}{4} = \left(\frac{4}{3}\right)^{-1} \leftrightarrow x = -1$.

137/ :1.Tìm m để phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt : $10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1).\sqrt{x^2+1}$.

2..Giải phương trình: $2^{\log_3 x+1} + 2^{\log_3 x-2} = x$.

Giải: <u>Nhận xét</u>: $10x^2 + 8x + 4 = 2(2x+1)^2 + 2(x^2+1)$

Phương trình tương đương với : $2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 - m\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)+2=0$. Đặt $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=t$ ĐK: $-2< t \le \sqrt{5}$.

Rút m ta có: $m=\frac{2t^2+2}{t}$ Lập bảng biến thiên của hàm số trên $\left(-2,\sqrt{5}\right]$ ta có kết quả của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là $4<m\le\frac{12}{\sqrt{5}}$ hoặc $-5<m<-4$.

2.ĐK: x > 0 . Đặt $t=\log_3 x \leftrightarrow x=3^t$. Ta có: $2.2^t+\frac{1}{4}2^t=3^t \leftrightarrow \frac{9}{4}.2^t=3^t \leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Khi t = 2 thì $\log_3 x=2 \leftrightarrow x=9$ (th) KL: nghiệm PT là $x=9$.

138/ Giải bất phương trình : $x+1\ge\sqrt{2\left(x^2-1\right)}$ (2) .

Giải:

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(x^2-1\right)\ge 0 \\ x+1\ge 0 \\ 2\left(x^2-1\right)\le\left(x+1\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -1 \vee x\ge 1 \\ x\ge -1 \\ x^2-2x-3\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ -1\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ 1\le x\le 3 \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình : $x=-1 \vee 1\le x\le 3$.

139 / Giải hệ phương trình , khi a > 1 :

$$\begin{cases} \sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}+\sqrt{z+a}=3\sqrt{\frac{a^2+1}{a}} \\ \sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}=3\sqrt{\frac{a^2-1}{a}} \end{cases}$$

Giải: Xét các véc tơ : $\overrightarrow{u}=\left(\sqrt{x+a}\ ;\sqrt{y+a}\ ;\sqrt{z+a}\right)$, $\overrightarrow{v}=\left(1\,;1\,;1\right)$

$$\Rightarrow\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)^2\le\left|\overrightarrow{u}\right|^2.\left|\overrightarrow{v}\right|^2$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}+\sqrt{z+a}\right)^2\le 3\left(3a+x+y+z\right)\ (1)$$

Tương tự $\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}\right)^2\le 3\left(3a-x-y-z\right)$ (2)

$$\Rightarrow\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}+\sqrt{z+a}\right)^2+\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}\right)^2\le 18a$$

Mà cộng hai phương trình của hệ ta có :

$$\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{y+a}+\sqrt{z+a}\right)^2+\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{a-y}+\sqrt{a-z}\right)^2=18a$$

Tức là dấu đẳng thức phải xảy ra trong các bất đẳng thức (1) và (2) , hay :

$$\begin{cases} \sqrt{x+a}=\sqrt{y+a}=\sqrt{z+a}=\sqrt{\frac{a^2+1}{a}} \\ \sqrt{a-x}=\sqrt{a-y}=\sqrt{a-z}=\sqrt{\frac{a^2-1}{a}} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{a}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là : $x=y=z=\frac{1}{a}$.

140/ Giaûi heä phöông trình : $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2 \end{cases}$

Giải: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+y^2+x+y+xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x\ \ +y)^2+x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ \ +y=0 \text{ hay } x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ \ +y=0 \text{ hay } x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ \ =-y \\ x^2=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ V $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ V $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ V $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

141/ Giaûi heä pt : $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases} (I)$

Giải:

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ (2x+y+1)+(x+y)=5 \end{cases}$

Ñaët $u=\sqrt{2x+y+1} \geq 0, v=\sqrt{x+y} \geq 0$;(I) thaønh $\begin{cases} u-v=1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=2 \Rightarrow v_1=1 \\ u_2=-1 \Rightarrow v_2=-2(\text{loại}) \end{array} \right.$

Vaäy $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1}=2 \\ \sqrt{x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

142/ Giaûi pt $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}\,(1)$

Giải:

1/ Giaûi pt $\sqrt{3x-3}-\sqrt{5-x}=\sqrt{2x-4}\,(1)$

Ñieàu kieän $\begin{cases} 3x-3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5 \\ 2x-4 \geq 0 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{3x-3}=\sqrt{5-x}+\sqrt{2x-4}$ vaø $2 \leq x \leq 5$

$\Leftrightarrow 3x-3=5-x+2x-4+2\sqrt{(5-x)(2x-4)}$ vaø $2 \leq x \leq 5$

$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{(5-x)(2x-4)}$ vaø $2 \leq x \leq 5$

$\Leftrightarrow x-2=0$ hay[$\sqrt{x-2}=\sqrt{(5-x)2}$ vaø $2 < x \leq 5$]

$\Leftrightarrow x=2$ hay [$x-2=2(5-x)$ và $2 < x \leq 5$]

$\Leftrightarrow x=2 \text{ hay } x=4$

143/ Giaûi baát phöông trình $\sqrt{8x^2-6x+1}-4x+1 \leq 0$ (1)

Giải: (1) $\Leftrightarrow \sqrt{8x^2-6x+1} \leq 4x-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8x^2-6x+1\ge 0\\4x-1\ge 0\\8x^2-6x+1\le(4x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\frac{1}{4}\vee x\ge\frac{1}{2}\\x\ge\frac{1}{4}\\8x^2-2x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{4}\vee x\ge\frac{1}{2}\\x\le 0\text{ hay }x\ge\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}\text{ hay }x\ge\frac{1}{2}$$

144/ Giaûi bpt $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$ (1)

Giải: bpt $\sqrt{2x+7}-\sqrt{5-x}\ge\sqrt{3x-2}$ (1)

Ñieàu kieän $\begin{cases}2x+7\ge 0\\5-x\ge 0\\3x-2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le x\le 5$

(1) $\Leftrightarrow\sqrt{2x+7}\ge\sqrt{3x-2}+\sqrt{5-x}$ và $\frac{2}{3}\le x\le 5$

$\Leftrightarrow 2x+7\ge 3x-2+5-x+2\sqrt{(3x-2)(5-x)}$ và $\frac{2}{3}\le x\le 5$

$\Leftrightarrow 2\ge\sqrt{(3x-2)(5-x)}$ và $\frac{2}{3}\le x\le 5\Leftrightarrow 3x^2-17x+14\ge 0$ và $\frac{2}{3}\le x\le 5$

$\Leftrightarrow$ ($x\le 1$ hay $\frac{14}{3}\le x$) và $\frac{2}{3}\le x\le 5\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le x\le 1$ hay $\frac{14}{3}\le x\le 5$

145/ Tìm m ñeå heä phöông trình sau coù nghieäm:

$$\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2005x\le 2005\ (1)\\x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\ (2)\end{cases}$$

Giải: Ñieàu kieän laø $x\ge -1$.Ta coù $7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}\le 0,\forall x\in[-1;1]$

Ta coù: (1) $\Leftrightarrow 7^{\sqrt{x+1}}\left(7^{2x}-7^2\right)\le 2005(1-x)$: đúng $\forall x\in[-1;1]$vaø sai khi $x>1$Do ñoù (1) $\Leftrightarrow$

$-1\le x\le 1$. Vaäy, heä bpt coù nghieäm $\Leftrightarrow f(x)=x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0$ coù nghieäm $\in[-1,1]$

$\Leftrightarrow\underset{x\in[-1;1]}{\mathbf{Max}}\,\mathbf{f(x)}\ge 0\Leftrightarrow\max\{f(-1),f(1)\}\ge 0$

$\Leftrightarrow\max\{3m+6,m+2\}\ge 0\Leftrightarrow 3m+6\ge 0$ hay $m+2\ge 0\Leftrightarrow m\ge -2$

146/ Giaûi baát phöông trình $9^{x^2-2x}-2\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-x^2}\le 3$ (1)

Giải: Ta coù (1) $\Leftrightarrow 9^{x^2-2x}-2.3^{x^2-2x}\le 3$. Ñaët $t=3^{x^2-2x}>0$, (1) thaønh

$t^2-2t-3\le 0\Leftrightarrow -1\le t\le 3$. Do ñoù, (1) $\Leftrightarrow -1\le 3^{x^2-2x}\le 3\Leftrightarrow 0<3^{x^2-2x}\le 3^1$

$\Leftrightarrow x^2-2x\le 1\Leftrightarrow x^2-2x-1\le 0\Leftrightarrow 1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$

147 /Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}(2x+1)[\ln(x+1)-\ln x]=(2y+1)[\ln(y+1)-\ln y]\quad(1)\\\sqrt{y-1}-2\sqrt[4]{(y+1)(x-1)}+m\sqrt{x+1}=0\quad(2)\end{cases}$$

Giải: Đặt $f(x)$ = $(2x+1)[\ln(x+1) - \ln x] = (2x+1)\ln\frac{x+1}{x}$ TXĐ: D = $[0;+\infty)$

Gọi x_1; $x_2 \in [0;+\infty)$ với $x_1 > x_2$

Ta có : $\left.\begin{array}{l} 2x_1+1 > 2x_2+1 > 0 \\ \ln\frac{x_1+1}{x_1} > \ln\frac{x_2+1}{x_2} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) : f(x)$ là hàm số tăng

Từ phương trình (1) $\Rightarrow$ x = y

(2) $\Rightarrow \sqrt{x-1} - 2\sqrt[4]{(x-1)(x+1)} + m\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 2\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} + m = 0$

Đặt X = $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} \Rightarrow 0 \le X < 1$

Vậy hệ có nghiệm khi phương trình: $X^2 - 2X + m = 0$ có nghiệm $0 \le X < 1$

Đặt $f(X) = X^2 - 2X \Rightarrow f'(X) = 2X - 2$ $\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ $-1 < m \le 0$

149/ 1) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+1}{x+y+2} = 2 \\ (xy-x-y+1)(x+y-2) = 6 \end{cases}$ $(x, y \in R)$

2) Tìm m thực để phương trình sau có nghiệm thực trong đoạn $\left[\frac{5}{2};4\right]$:

$$(m-1).\log_{1/2}^2(x-2)^2 + 4(m-5)\log_{1/2}\frac{1}{x-2} + 4m - 4 = 0$$

Giải: 1. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ (x-1)(y-1)[(x-1)+(y-1)] = 6 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-1 \end{cases}$, thu được hệ $\begin{cases} u^2+v^2 = 5 \\ uv(u+v) = 6 \end{cases}$

Giải ra được: $\begin{cases} u+v = 3 \\ u.v = 2 \end{cases}$; * Giải ra được: $\begin{cases} u = x-1 = 1 \\ v = y-1 = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = x-1 = 2 \\ v = y-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$

2 / PT $\Leftrightarrow (m-1).\log_{1/2}^2(x-2) - (m-5)\log_{1/2}(x-2) + m - 1 = 0$

*Đặt $t = \log_{1/2}(x-2), x \in \left[\frac{5}{2};4\right] \Rightarrow t \in [-1;1]$;

Thu được pt: $m = f(t) = \frac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$; $f'(t) = \frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ Lập BBT của f(t) trên đoạn $[-1;1]$, thấy f(t) liên tục và NB trên đoạn $[-1;1]$, nên $m \in \left[-3;\frac{7}{3}\right]$ thỏa mãn đề bài.

150/ Tìm m để hệ phương trình sau có 2 nghiệm phân biệt:

$$10x^2 + 8x + 4 = m(2x+1).\sqrt{x^2+1}.$$

Giải: $10x^2 + 8x + 4 = 2(2x+1)^2 + 2(x^2+1)$

Phương trình tương đương với : $2\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right)^2 - m\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right) + 2 = 0$.

Đặt $\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}=t$ ĐK: $-2< t \le \sqrt{5}$. Rút m ta có : $m=\frac{2t^2+2}{t}$

Lập bảng biếm thiên của hàm số trên $\left(-2,\sqrt{5}\right]$, ta có kết quả của m để hệ phương có 2 nghiệm phân biệt là

$4<m\le\frac{12}{\sqrt{5}}$ *hoặc* $-5<m<-4$

151/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\log_2 x+\log_{xy}16=4-\dfrac{1}{\log_y 2}\\ 4x^4+8x^2+xy=16x^2\sqrt{4x+y}\end{cases}$

Giải: ÑK: $x>0, y>0, xy\ne1, y\ne1$

+) Töø PT (1) ta coù: xy = 4 ; +) Theá vaøo (2) ta coù: $x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$

+) KL : Heä coù caùc nghieäm laø : $\left(2+\sqrt{3};\frac{4}{2+\sqrt{3}}\right);\left(2-\sqrt{3};\frac{4}{2-\sqrt{3}}\right)$

152/ Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{x+1+6\sqrt{x-8}}+\sqrt{x+1-6\sqrt{x-8}}=\frac{x+m}{6}$

Giải:+) ÑK: $x\ge8$

+) PT $\Leftrightarrow \left|\sqrt{x-8}+3\right|+\left|\sqrt{x-8}-3\right|=\frac{x+m}{6}$; +) Neáu $x\ge17$, ta coù PT trôû thaønh :

$12\sqrt{x+8}-x=m$. PT coù nghieäm $x\ge17 \Leftrightarrow 77\le m\le100$

+) Neáu $8\le x<17$, ta coù PT trôû thaønh : 36 – x = m. PT coù nghieäm $\Leftrightarrow 19<m\le28$

KL: $77\le m\le100$ hoaëc $19<m\le28$

153/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y\\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2\end{cases}$, $(x,y\in\mathbf{R})$.

Giải: $y\ne0$, ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y\\ y(x+y)^2=2x^2+7y+2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\ (x+y)^2-2\dfrac{x^2+1}{y}=7\end{cases}$. Đặt $u=\frac{x^2+1}{y}, v=x+y$ ta có hệ:

$\begin{cases}u+v=4\\ v^2-2u=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=4-v\\ v^2+2v-15=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}v=3, u=1\\ v=-5, u=9\end{array}\right.$

Với $v=3, u=1$ ta có hệ: $\begin{cases}x^2+1=y\\ x+y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+1=y\\ y=3-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-2=0\\ y=3-x\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1, y=2\\ x=-2, y=5\end{array}\right.$.

Với $v=-5, u=9$ ta có hệ: $\begin{cases}x^2+1=9y\\ x+y=-5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+1=9y\\ y=-5-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+9x+46=0\\ y=-5-x\end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=\{(1;2),(-2;5)\}$.

154/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases}2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2)+\log_{2+y}(x^2-2x+1)=6\\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1\end{cases}$, $(x,y\in\mathbf{R})$.

Giải:+ Điều kiện:

$$\begin{cases} -xy-2x+y+2>0,\ x^2-2x+1>0,\ y+5>0,\ x+4>0 \\ 0<1-x\neq 1,\ 0<2+y\neq 1 \end{cases} (I).$$

$$(I)\Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)]+2\log_{2+y}(1-x)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)\quad\quad =1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2)+\log_{2+y}(1-x)-2=0\ (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)\quad =1\,(2). \end{cases}$$

Đặt $\log_{2+y}(1-x)=t$ thì (1) trở thành: $t+\dfrac{1}{t}-2=0\Leftrightarrow (t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ ta có: $1-x=y+2\Leftrightarrow y=-x-1\,(3)$. Thế vào (2) ta có:

$$\log_{1-x}(-x+4)-\log_{1-x}(x+4)\quad =1\Leftrightarrow \log_{1-x}\frac{-x+4}{x+4}=1\Leftrightarrow \frac{-x+4}{x+4}=1-x\Leftrightarrow x^2+2x=0$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$.Kiểm tra thấy chỉ có $x=-2,\ y=1$ thoả mãn điều kiện trên.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=-2,\ y=1$.

155/ . Giải phương trình: $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$

Giải:Giải phương trình: $8 - x.2^x + 2^{3-x} - x = 0$, $\Leftrightarrow$ $8 - x.2^x - \dfrac{8}{2^x} - x = 0$ $\Leftrightarrow$ $8(1+\dfrac{1}{2^x}) - x(2^x+1) = 0$

$\dfrac{8}{2^x}(2^x+1)-x(2^x+1)=0$ $\Leftrightarrow$ $(2^x+1)(\dfrac{8}{2^x}-x)=0\Leftrightarrow \dfrac{8}{2^x}=x$

Vế trái nghịch biến, vế phải đồng biến $\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất x=2

156/ 1) Giải phương trình $\sqrt{x-5}$ + $\sqrt{x}$ + $\sqrt{x+7}$ + $\sqrt{x+16}$ = 14.

2)Tìm m để ptrình sau đây có đúng 2 nghiệm: $\sqrt{(x^2-2x+2)^3}-4\sqrt{x^2-2x+2}=2x^2-4x+m$.

Giải: 1.TXĐ: $x\geq 5$; x= 5 không là nghiệm

Đặt y= $\sqrt{x-5}+\sqrt{x}+\sqrt{x+7}\sqrt{x+16}-14$ => y' = $\dfrac{1}{2\sqrt{x-5}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+7}}+\dfrac{1}{2\sqrt{x+16}}>0$

Hàm số đồng biến $\Rightarrow$ phương trình y=0 có 1 nghiệm duy nhất. Ta có y(9) = 14 $\Leftrightarrow$ x= 9

2. Đặt t= $\sqrt{x^2-2x+2}=\sqrt{(x-1)^2+1}\geq 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} f(t)=t^3-2t^2-4t+4=m \\ t\geq 1 \end{cases}$

$f'(t)=3t^2-4t-4=0\Leftrightarrow t_1=-2/3;\quad t_2=2$

BBT

t	-2/3	1		2		+∞
f'(t)	0		-	0	+	
f(t)		1/2	↘	-4	↗	+∞

Từ bảng biến thiên $\left[\begin{array}{l} m\succ \dfrac{1}{2} \\ m=-4 \end{array}\right.$

157/ Giải bất phương trình: $\log_2(\sqrt{3x+1}+6)-1\geq \log_2(7-\sqrt{10-x})$

Giải: Điều kiện: $-\dfrac{1}{3}\leq x\leq 10$

BPT $\Leftrightarrow$ $\log_2\dfrac{\sqrt{3x+1}+6}{2}\geq \log_2(7-\sqrt{10-x})\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3x+1}+6}{2}\geq 7-\sqrt{10-x}$

$\Rightarrow \sqrt{3x+1}+6\geq 2(7-\sqrt{10-x}) \Rightarrow \sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x}\geq 8 \Rightarrow 49x^2-418x+369\leq 0$

$\Rightarrow 1\leq x\leq \frac{369}{49}$ (thoả)

158/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y \\ 2^x + 2^y = 3 \end{cases}$

Giải:Điều kiện: $x>0$ và $x\neq 1$ và $y>0$ và $y\neq 1$

Ta có $\log_y\sqrt{xy}=\log_x y \Rightarrow \log_y^2 x+\log_y x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\log_y x=1\\ \log_y x=-2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=y\\ x=\frac{1}{y^2}\end{array}\right.$

- Với $x=y \Rightarrow$ $x=y=\log_2 3-1$
- Với $x=\frac{1}{y^2}$ ta có: $2^{\frac{1}{y^2}}+2^y=3$ theo bất đẳng thức Cô-si suy ra PT vô nghiệm

159/ .Giải bất phương trình: $\sqrt{2x+10}\geq\sqrt{5x+10}-\sqrt{x-2}$

Giải: *Điều kiện: $x\geq 2$; $(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x+10}+\sqrt{x-2}\geq\sqrt{5x+10}$ $\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+6x-20}\geq x+1(2)$

Khi $x\geq 2$ => x+1>0 bình phương 2 vế phương trình (2)

$(2)\Leftrightarrow 2x^2+6x-20\geq x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2+4x-11\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-7]\cup[3;+\infty)$

Kết hợp điều kiện vậy nghiệm của bất phương trình là: $x\geq 3$

160/ 1) Tìm các giá trị của tham số *m* để phương trình: $m\sqrt{x^2-2x+2}=x+2$ có 2 nghiệm phân biệt.

2) Giải phương trình: $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_8(x-1)^3=0$.

Giải: Ta có: $x^2-2x+2\geq 1$nên $m\sqrt{x^2-2x+2}=x+2\Leftrightarrow m=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

Xét $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}$, ta có:

$f'(x)=\frac{4-3x}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}; f\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{10}; \lim_{x\to-\infty} f(x)=-1; \lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	-1	↗	$\sqrt{10}$	↘	1

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $1<m<\sqrt{10}$

161/ $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_8(x-1)^3=0$

Giải:

$\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_8(x-1)^3=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2(x+1)+\log_2(3-x)-\log_2(x-1)=0\\ 1<x<3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(3-x)=x-1\\ 1<x<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-x-4=0\\ 1<x<3\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$

162/ Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2y+2x^2+3y-15=0\\ x^4+y^2-2x^2-4y-5=0\end{cases}$

Giải: Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-1)(y-2)+4(x^2-1)+4(y-2)=5\\ (x^2-1)^2+(y-2)^2=10\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=x^2-1\\ v=y-2\end{cases}$

Ta có hpt $\begin{cases}u^2+v^2=10\\ uv+4(u+v)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2-2uv=10\\ uv+4(u+v)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=-10\\ uv=45\end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc

$\begin{cases}u+v=2\\ uv=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=-1\\ v=3\end{cases}$ +) $\begin{cases}u=3\\ v=-1\end{cases}$ Tìm được 2 nghiệm $(x;y)=(2;1)$ và

$(x;y)=(-2;1)$ +) $\begin{cases}u=-1\\ v=3\end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x;y)=(0;5)$

Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: (2;1), (-2;1), (0;5)

163/ : 1. Giải phương trình: $\log(10.5^x+15.20^x)=x+\log 25.$

2. Giải bất phương trình $1+\log_2 x+\log_2(x+2)>\log_{\sqrt{2}}(6-x)$

Giải: 1. PT $\Leftrightarrow \log(10.5^x+15.20^x)=\log(25.10^x) \Leftrightarrow 10.5^x+15.20^x=25.10^x$

$\Leftrightarrow 15.4^x-25.2^x+10=0$ (chia hai vế của phương trình cho 5^x) Đặt $t=2^x(t>0)$, Ta có pt :

$15t^2-25t+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1(tm)\\ t=\dfrac{2}{3}(tm)\end{array}\right.$ Với $t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Với $t=\dfrac{2}{3} \Rightarrow 2^x=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x=\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=\log_2\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

2. Đk: $0<x<6$. BPT $\Leftrightarrow \log_2(2x^2+4x)>\log_2(6-x)^2$ BPT

$\Leftrightarrow 2x^2+4x>(6-x)^2 \Leftrightarrow x^2+16x-36>0 \Leftrightarrow x<-18$ hoặc $x>2$ .Kết hợp đk ta có tập nghiệm BPT là S =(2; 6)

164/ Giải bất phương trình : $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}>\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$

Giải: $\dfrac{x-3}{3\sqrt{x+1}+x+3}>\dfrac{2\sqrt{9-x}}{x}$.

ĐK: $-1\le x\le 9$ và $x\neq 0$

Bpt $\Leftrightarrow \dfrac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}+2)(\sqrt{x+1}+1)} > \dfrac{2\sqrt{9-x}}{(\sqrt{x+1}+1)(\sqrt{x+1}-1)} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-2 > \dfrac{2\sqrt{9-x}}{\sqrt{x+1}-1}$

TH1: $\sqrt{x+1}-1>0 \Leftrightarrow x>0$; Bpt $\Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1} > 2\sqrt{9-x}$

$\Leftrightarrow (x-8)+(9-3\sqrt{x-1})+(2-2\sqrt{9-x})>0 \quad \Leftrightarrow (x-8)(1-\dfrac{9}{9+3\sqrt{x+1}}+\dfrac{8}{2+2\sqrt{9-x}})>0$

$\Leftrightarrow x>8$

Kết hợp đk : $8 < x \le 9$

TH2: $\sqrt{x+1}-1<0 \Leftrightarrow x<0$; Bpt $\Leftrightarrow x+3-3\sqrt{x+1} < 2\sqrt{9-x} \Leftrightarrow x<8$; Kết hợp đk: $-1 \le x < 0$

Vậy tập nghiệm của bpt S = [-1; 0)∪ (8; 9]

165/ Giải phương trình $\log_9(x+1)^2+\log_{\sqrt{3}}2=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{4-x}+\log_{27}(x+4)^3$

Giải: $\log_9(x+1)^2 + \log_{\sqrt{3}}2=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{4-x}+\log_{27}(x+4)^3$ (1)

§ K: $\begin{cases} -4<x<4 \\ x\neq -1 \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \log_3(x+1)+\log_3 4=\log_3(4-x)+\log_3(x+4)$

$\Leftrightarrow \log_3 4|x+1| = \log_3(16-x^2) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$;

Giải phương trình tìm được X=2 , hoặc X= -2

166/ 1) Giải phương trình: $x^3-\sqrt[3]{x+2\ln x}-\dfrac{2}{3}\ln\left(x+2\ln x\right)=0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (3x+y)(x+3y)\sqrt{xy}=14 \\ (x+y)(x^2+14xy+y^2)=36 \end{cases}$

Giải: 1. Đặt $y=\sqrt[3]{x+2\ln x}>0$ Đưa về hệ PT đối xứng. PT có nghiệm duy nhất $x=1$.

2. Đưa về PT đẳng cấp (*bậc 3*) bằng cách đặt ẩn phụ $u=x+y;\ v=\sqrt{xy}\ge 0$.

167/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

Giải: Điều kiện x+ y >0

$\begin{cases} (x+y)^2-1-2xy+\dfrac{2xy}{x+y}=0 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)(x+y+1-\dfrac{2xy}{x+y})=0 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases}$

$\begin{cases} (x+y-1)(x+y+1)=0 \\ \sqrt{x+y}=x^2-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x^2-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} h \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$

168/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ x^2+2y+2+\sqrt{x+y}=\sqrt{4x+3y}+\sqrt{4x+5y}. \end{cases}$

Giải: $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1(1) \\ x^2+2y+2+\sqrt{x+y}=\sqrt{4x+3y}+\sqrt{4x+5y}(2). \end{cases}$

Điều kiện: x +y>0, 4x +3y ≥ 0, 4x +5y ≥ 0.

$(1)\Leftrightarrow (x+y)^2-1+\dfrac{2xy}{x+y}-2xy=0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left(x+y+1-\dfrac{2xy}{x+y}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+y-1)\left(\dfrac{x^2+y^2+x+y}{x+y}\right)=0 \Leftrightarrow x+y-1=0$ (do $\dfrac{x^2+y^2+x+y}{x+y}>0$).

Với $y+x=1 \leftrightarrow y=1-x$ thay vào (2) ta được $4+(x-1)^2=\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}$ (*)

Ta thấy vế trái (*) $4+(x-1)^2\ge 4$ dấu "=" khi x =1.

Ta thấy vế phải (*) $\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\le\sqrt{(1+1)[(3+x)+(5-x)]}=4$ (Bunhiacopski) dấu "=" khi x =1. (*)

$\leftrightarrow x=1 \rightarrow y=0$. Ta thấy (x;y) = (1;0) thỏa mãn đk.

Vậy hệ phương trình có một nghiệm duy nhất (x;y) = (1;0)

169/ 1. Giải phương trình: $3^{x^2+2}.\log_2(x^2-x+2)-3^{2|x-2|+x}=3^{2|x-2|+x}.\log_2|x-2|$.

2. Giải phương trình: $\log_3\left(3^x+2\right)+\log_3\left(3^{x-1}+1\right)=\log_3\left(2.9^x+3^x+9\right)-1$.

Giải:1. Điều kiện x ≠2

Phương trình tương đương với $3^{x^2-x+2}.\log(x^2-x+2)=3^{2|x-2|}+3^{2|x-2|}.\log|x-2|$

$\leftrightarrow 3^{x^2-x+2}.\log_2(x^2-x+2)=3^{2|x-2|}.\log_2(2|x-2|)$ (*)

Vì $x^2-x+2>1$ nên vế trái dương vậy vế phải dương $\rightarrow |x-2|>1$

Xét hàm số $f(t)=3^t.\log_2 t$ với t >1, $f'(t)=3^t.\ln 3.\log_2 t+\dfrac{3^t}{t.\ln 2}>0 \forall t>1$. Vậy f(t) đồng biến trên (1; +∞)

Từ (*) ta có $f(x^2-x+2)=f(2|x-2|)\leftrightarrow x^2-x+2=2|x-2|$

$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+2=2x-4 \\ x^2-x+2=-2x+4(2) \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+6=0(1) \\ x^2+x-2=0(2) \end{array}\right.$

pt(1) vô nghiệm, pt(2) có nghiệm x =1 và x = -2 tm điều kiện

Vậy nghiệm của phương trình là: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$

2. Phương trình tương đương với $\log_3\left[\left(3^x+2\right)\left(3^x+3\right)\right]=\log_3\left(2.9^x+3^x+9\right)$

$\leftrightarrow\left(3^x+2\right)\left(3^x+3\right)=\left(2.9^x+3^x+9\right)\leftrightarrow 9^x-4.3^x+3=0$ (*). Đặt $t=3^x, t>0$. (*)

$\leftrightarrow t^2-4t+3=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn đk t>0) ; Với t =1 ↔ $3^x=1$ ↔ x = 0.

Với t =3 ↔ $3^x=3$ ↔ x = 1. Vậy phương trình có 2 nghiệm x =0 hoặc x =1.

170/ Giaûi heä phöông trình : $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2 \end{cases}$

Giải: Giaûi heä phöông trình : (I) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x(x+y+1)+y(y+1)=2 \end{cases}$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+y^2+x+y+xy=2 \Rightarrow xy=-2 \end{cases}$$

Đặt $S=x+y;P=xy(S^2\geq 4P)\Rightarrow S^2=x^2+y^2+2xy\Rightarrow x^2+y^2=S^2-2P$

Vaäy $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} S^2-2P+S=4 \\ S^2-P+S=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=-2 \\ \left[\begin{array}{l} S=0 \\ S=-1 \end{array}\right. \end{cases}$

$TH_1:\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}$ vaäy x, y laø nghieäm cuûa phöông trình $X^2+0X-2=0$

Vaäy heä coù 2 nghieäm $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$

$TH_2:\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$ vaäy x,y laø nghieäm cuûa phöông trình $X^2+X-2=0$

$\Rightarrow X=1$ hay $X=-2$. Vaäy heä coù 2 nghieäm $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ V $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

Toùm laïi heä Pt (I) coù 4 nghieäm $\begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases}$ V $\begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$ V $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$ V $\begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

171/ 1. Giải phương trình $2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1})=x-4$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{y-1}+y^2 \\ 2\sqrt{y^2+5}=2\sqrt{x-1}+x^2 \end{cases}$

Giải: 1. $2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1})=x-4$ (1) - Điều kiện: $x\geq\frac{3}{2}$.

- Nhận thấy $x=4$ không là nghiệm của PT. Với $x\neq 4\Rightarrow\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1}\neq 0$.

PT $\Rightarrow 2(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+1})(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1})=(x-4)(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1})$

$\Leftrightarrow 2(x-4)=(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1})(x-4)$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-3}-\sqrt{x+1}=2.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra

$$\begin{cases} \sqrt{2x-3}=\frac{x}{4} \\ \sqrt{x+1}=\frac{x-8}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 8 \\ x^2-32x+48=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 8 \\ x=16\pm\sqrt{208} \end{cases} \Leftrightarrow x=16+\sqrt{208}\ (t/m)$$

Vậy PT có 1 nghiệm $x=16+\sqrt{208}$.

2.Giải hệ $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+5}=2\sqrt{y-1}+y^2 & (1) \\ 2\sqrt{y^2+5}=2\sqrt{x-1}+x^2 & (2) \end{cases}$

- Điều kiện: $x, y \ge 1$. Nhận thấy $x = y = 1$ không là nghiệm của hệ $\Rightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1} \ne 0$.

Hệ $\Rightarrow 2(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{y^2+5}) = 2(\sqrt{y-1}-\sqrt{x-1}) + (y^2 - x^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2+5}} = \frac{2(y-x)}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} + (y^2-x^2)$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{2}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2+5}} + \frac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}} + x + y\right) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

- Thế vào (1) được: $2\sqrt{x^2+5} = 2\sqrt{x-1} + x^2$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x^2+5}-3) - 2(\sqrt{x-1}-1) - (x^2-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-4)}{\sqrt{x^2+5}+3} - \frac{2(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} - (x^2-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} - (x+2) - \frac{2}{\sqrt{x-1}+1}\right) = 0 \quad (3)$$

- Vì $x \ge 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+5}+3 > 2 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x^2+5}+3} < 1 \Rightarrow \frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} < (x+2)$

$$\Rightarrow \frac{2(x+2)}{\sqrt{x^2+5}+3} - (x+2) - \frac{2}{\sqrt{x-1}+1} < 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x = 2.$$

Vậy hệ có 1 nghiệm (2; 2).

172/ Giải phương trình: $\log^2{}_2 8x^3 - 9\log_2 4x^2 - 36\log_4 2x = 0$

Giải: Giải phương trình: $\log^2{}_2 8x^3 - 9\log_2 4x^2 - 36\log_4 2x = 0$(1) Điều kiện $x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow (3+3\log_2 x)^2 - 9(2+2\log_2 x) - 18(1+\log_2 x) = 0$$

$\Leftrightarrow 9\log_2{}^2 x - 18\log_2 x - 27 = 0 \quad \Leftrightarrow \log_2 x = -1$ hoặc $\log_2 x = 3 \quad \Leftrightarrow x = 1/2$ hoặc $x = 8$

173 / Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases}$

Giải: Giải hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 + 9 \\ 3x^2 - 3x = -6y^2 - 12y \end{cases}$

$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3 \Rightarrow x = y + 3$

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y^3 + 9 \\ x = y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

174/ 1) Giải phương trình : $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$

2) Giải bất phương trình: $\left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}\right)\left(1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}\right) \ge 4$

Giải: 1/ Giải phương trình: $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$. Đặt $2^x = u > 0; \sqrt[3]{2^{x+1} - 1} = v$.

PT $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u^3+1=2v \\ v^3+1=2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+1=2v \\ (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=v>0 \\ u^3-2u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=1 \end{cases} \\ \begin{cases} u=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ v=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x=1 \\ \sqrt[3]{2^{x+1}-1}=1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt[3]{2^{x+1}-1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ Vn \end{array}\right.$$

Phương trình có nghiệm là: $x=0$

2. Giải bất pt: $\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}\right)\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)\ge 4$

Điều kiện $D/k \begin{cases} x+3\ge 0 \\ x-1\ge 0 \\ x^2+2x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ x\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x\ge 1$

Nhân hai vế của bpt với $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$, ta được

$$\text{BPT} \Leftrightarrow 4.\left(1+\sqrt{x^2+2x-3}\right)\ge 4.\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}\right) \Leftrightarrow 1+\sqrt{x^2+2x-3}\ge \sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}$$

$$x^2+2x-2+2\sqrt{x^2+2x-3}\ge 2x+2+2\sqrt{x^2+2x-3} \Leftrightarrow x^2-4\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -2 \\ x\ge 2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x\ge 2$ là nghiệm của bất pt

175/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4-4x^2+y^2-6y+9=0 \\ x^2y+x^2+2y-22=0 \end{cases}$

Giải: Giải hệ pt: $\begin{cases} (x^2-2)^2+(y-3)^2=4 \\ (x^2-2+4)(y-3+3)+x^2-2-20=0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x^2-2=u \\ y-3=v \end{cases}$ Khi đó (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} u^2+v^2=4 \\ u.v+4(u+v)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=0 \\ v=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2-2=2 \\ y-3=0 \end{cases}$ Hoặc $\begin{cases} x^2-2=0 \\ y-3=2 \end{cases}$

Kết luận:Hệ pt có 4 nghiệm là: $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}; \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=5 \end{cases}; \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=5 \end{cases}$

176 /Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = 3\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{3-2x}$$

Giải:

2) Ta có $y=\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{3-2x}\leqslant 2\sqrt[4]{\dfrac{x+2-x}{2}}+3\sqrt[4]{\dfrac{x+x+3-2x}{3}}=5\Rightarrow y_{\max}=5$ khi $x=1$.

Ta có $y=\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{2}}+\sqrt[4]{\dfrac{2-x}{2}}\right)\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\left(\sqrt[4]{\dfrac{x}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{x}{3}}+\sqrt[4]{\dfrac{3-2x}{3}}\right)\Rightarrow y\geqslant \sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}=y_{\min}$.

177/ Giải phương trình $4\log_4^2 2x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x^5 - 1 \quad (x \in □)$

Giải: Giải phương trình $4\log_4^2 2x = \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}} x^5 - 1 \quad (x \in □)(1)$

ĐK :x>0 $(1) \Leftrightarrow \log_2^2 2x = 5\log_2 x - 1 \Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 = 5\log_2 x - 1 \Leftrightarrow \log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0(1)$ Đặt t=$\log_2$x (1)

trở thành $\quad t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$

t=1 ta có $\log_2$x=1 $\Leftrightarrow$ x=2 ;t=2 ta có $\log_2$x=2 $\Leftrightarrow$ x=4

kết hợp với ĐKXĐ $\Rightarrow$ phương trình đã cho có 2 nghiệm là x=2 và x=4

179/ 1. Giải phương trình: $\sqrt{10x+1} + \sqrt{3x+5} = \sqrt{9x+4} - \sqrt{2x-2}$

2 .Giải phương trình $2\log_2(2x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(9x-1) = 1$

Giải: Điều kiện: x □ $\frac{5}{.;3}$

Phương trình đã cho tương đương với $\quad 10x □ 1 □ \quad 2x □ 2 □ \quad\quad 9x □ 4 □ \quad 3x □ 5 \quad$ (1).

Vì $x □ \frac{5}{3}$ nên cả hai vế của (1) đều dương. Do đó:

(1) □ 12x □1□ 2 (10x □1)(2x □ 2) □ 12x □1□ 2 (9x □ 4)(3x □ 5)

□ $7x^2$ □ 15x □18 □ 0 □ x □ 3 *hay* x □ □ $\frac{6}{7}$.

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là x = 3.

2/ Điều kiện: x □ $\frac{1}{9}$.

Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$\log_2(2x$ □ $2)^2$ □ log (9x □1) □ 1

□ log (2x □ $2)^2$ □ log (9x □1) □ log 2 □ log (2x □ $2)^2$ □ log (18x □ 2)

□ (2x □ $2)^2$ □ (18x □ 2) □ $2x^2$ □ 5x □ 3 □ 0 □ x = 1 hoặc x □ $\frac{3}{2}$.

Đối chiếu điều kiện suy ra nghiệm của phương trình là x = 1 hay x □ $\frac{3}{2}$.

186/ : Giải phương trình $\frac{1}{\log_{x-2} 4} + \frac{1}{\log_{2x-1} 4} - \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{x+1}$

Giải: Giải phương trình $\frac{1}{\log_{x-2} 4} + \frac{1}{\log_{2x-1} 4} - \frac{1}{2} = \log_2 \sqrt{x+1}$

Điều kiện $x > 2, x \neq 3;\quad (1) \Leftrightarrow \log_4(x-2) + \log_4(2x-1) - \log_4 2 = \log_4(x+1)$

$(x-2)(2x-1) = 2(x+1) \Leftrightarrow 2x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{7}{2} \end{array}\right.$; Đối chiếu điều kiện ta có $x = \frac{7}{2}$

187/ : 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + 2x^2 + 3y - 15 = 0 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

2. Giải phương trình: $\log(10.5^x + 15.20^x) = x + \log 25.$

3. Giải bất phương trình $1+\log_2 x+\log_2(x+2)>\log_{\sqrt{2}}(6-x)$

Giải:

1/ Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-1)(y-2)+4(x^2-1)+4(y-2)=5\\(x^2-1)^2+(y-2)^2=10\end{cases}$. Đặt $\begin{cases}u=x^2-1\\v=y-2\end{cases}$

Ta có hpt $\begin{cases}u^2+v^2=10\\uv+4(u+v)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(u+v)^2-2uv=10\\uv+4(u+v)=5\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}u+v=-10\\uv=45\end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc $\begin{cases}u+v=2\\uv=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=3\\v=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=-1\\v=3\end{cases}$

+) $\begin{cases}u=3\\v=-1\end{cases}$ Tìm được 2 nghiệm $(x;y)=(2;1)$ và $(x;y)=(-2;1)$

+) $\begin{cases}u=-1\\v=3\end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x;y)=(0;5)$

Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: (2;1), (-2;1), (0;5)

2/. PT $\Leftrightarrow \log\left(10.5^x+15.20^x\right)=\log\left(25.10^x\right) \Leftrightarrow 10.5^x+15.20^x=25.10^x$

$\Leftrightarrow 15.4^x-25.2^x+10=0$ (chia hai vế của phương trình cho 5^x)

Đặt $t=2^x(t>0)$, Ta có pt : $15t^2-25t+10=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1(tm)\\t=\frac{2}{3}(tm)\end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow 2^x=1 \Leftrightarrow x=0$

Với $t=\frac{2}{3} \Rightarrow 2^x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow x=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=0$ và $x=\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

3/ Đk: $0<x<6$. BPT $\Leftrightarrow \log_2(2x^2+4x)>\log_2(6-x)^2$

BPT $\Leftrightarrow 2x^2+4x>(6-x)^2 \Leftrightarrow x^2+16x-36>0 \Leftrightarrow x<-18$ hoặc $x>2$

Kết hợp đk ta có tập nghiệm BPT là S =(2; 6)

188/ : Giải bất phương trình: $\log_3^2 x-\log_2(8x).\log_3 x+\log_2 x^3<0$ (1)

Giải:

Điều kiện x>0;Biến đổi phương trình tương đương về dạng:

$$\log_3^2 x-(3+\log_2 x)\log_3 x+3\log_2 x<0$$

Đặt $t=\log_3 x$ khi đó bất phương trình có dạng:

$$f(t)=t^2-(3+\log_2 x).t+3\log_2 x<0 \quad (2)$$

Ta có: $\Delta=(3+\log_2 x)^2-12\log_2 x=(3-\log_2 x)^2$.

Do đó f(t)=0 có nghiệm: $\left[\begin{array}{l}t=3\\t=\log_2 x\end{array}\right.$

Do đó (2) tương đương với: $(t-3)(t-\log_2 x)<0 \Leftrightarrow (\log_3 x-3)(\log_3 x-\log_2 x)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3 x-3>0\\ \log_3 x-\log_2 x<0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3 x-3<0\\ \log_3 x-\log_2 x>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_3 x>3\\ \log_3 x<\log_2 x\end{cases}\\ \begin{cases}\log_3 x<3\\ \log_3 x>\log_2 x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>27\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}x<27\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>27\\ 0<x<1\end{array}\right.$$

Vậy bất phương trình có nghiệm là tập $(0;1)\cup(27;+\infty)$

189/ : 1. Giaûi heä phöông trình : $\begin{cases}x^4-4x^2+y^2-6y+9=0\\ x^2y+x^2+2y-22=0\end{cases}$

2. Giải phương trình: $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$

3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(y-2x+8)=6\\ 8^x+2^x.3^y=2.3^{x+y}\end{cases}$

Giải:

$1/\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-2)^2+(y-3)^2=4\\ (x^2+2)y+x^2-22=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x^2-2)^2+(y-3)^2=4\\ (x^2-2+4)(y-3+3)+x^2-2-20=0\end{cases}$ $\begin{cases}(x^2-2)^2+(y-3)^2=4\\ (x^2-2+4)(y-3+3)+x^2-2-20=0\end{cases}$

Đặt $\begin{cases}x^2-2=u\\ y-3=v\end{cases}$ * Thay vào ta có hệ phương trình $\begin{cases}u^2+v^2=4\\ u.v+4(u+v)=8\end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases}u=2\\ v=0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=0\\ v=2\end{cases}$

Thay vào phương trình ta có $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}$; $\begin{cases}x=\sqrt{2}\\ y=5\end{cases}$; $\begin{cases}x=-\sqrt{2}\\ y=5\end{cases}$

2 . $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ (2) Điều kiện: $\begin{cases}x+1\neq 0\\ 4-x>0\\ 4+x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<x<4\\ x\neq -1\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow \log_2|x+1|+2=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)\Leftrightarrow \log_2|x+1|+2=\log_2(16-x^2)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1|=\log_2(16-x^2)\Leftrightarrow 4|x+1|=16-x^2$

+ Với $-1<x<4$ ta có phương trình $x^2+4x-12=0\,(3)$;

$(3)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-6\,(\text{loại})\end{array}\right.$

Với $-4<x<-1$ ta có phương trình $x^2-4x-20=0$ (4); $(4)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{24}\\ x=2+\sqrt{24}\,(\text{loại})\end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x=2$ hoặc $x=2\left(1-\sqrt{6}\right)$

3. Pt đầu $\Leftrightarrow$ y – 2x + 8 = $\left(\sqrt{2}\right)^6 \Leftrightarrow y = 2x$

thế vào pt thứ hai ta được:

$8^x + 2^x.3^{2x} = 2.3^{3x} \Leftrightarrow 8^x + 18^x = 2.27^x \Leftrightarrow \left(\frac{8}{27}\right)^x + \left(\frac{18}{27}\right)^x = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$

Đặt: t = $\left(\frac{2}{3}\right)^x$, (đk t > 0) , ta có pt: $t^3 + t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+2) = 0$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

190/ : 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + 2x^2 + 3y - 15 = 0 \\ x^4 + y^2 - 2x^2 - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

2. Giải phương trình: $\log(10.5^x + 15.20^x) = x + \log 25.$

3.Giải bất phương trình $1 + \log_2 x + \log_2(x+2) > \log_{\sqrt{2}}(6-x)$

Giải:

1/ Hệ pt $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-1)(y-2) + 4(x^2-1) + 4(y-2) = 5 \\ (x^2-1)^2 + (y-2)^2 = 10 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} u = x^2 - 1 \\ v = y - 2 \end{cases}$

Ta có hpt $\begin{cases} u^2 + v^2 = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 - 2uv = 10 \\ uv + 4(u+v) = 5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = -10 \\ uv = 45 \end{cases}$ (vô nghiệm) hoặc $\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$

+) $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$ Tìm được 2 nghiệm $(x;y) = (2;1)$ và $(x;y) = (-2;1)$

+) $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$ Tìm được nghiệm $(x;y) = (0;5)$

Kết luận: Hệ phương trình có 3 nghiệm: (2;1), (-2;1), (0;5)

2/ PT $\Leftrightarrow \log(10.5^x + 15.20^x) = \log(25.10^x) \Leftrightarrow 10.5^x + 15.20^x = 25.10^x$

$\Leftrightarrow 15.4^x - 25.2^x + 10 = 0$ (chia hai vế của phương trình cho 5^x)

Đặt $t = 2^x (t > 0)$, Ta có pt : $15t^2 - 25t + 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 (tm) \\ t = \frac{2}{3} (tm) \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Rightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

Với $t = \frac{2}{3} \Rightarrow 2^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$.

3 / Đk: 0< x< 6. BPT $\Leftrightarrow \log_2(2x^2 + 4x) > \log_2(6-x)^2$

BPT $\Leftrightarrow 2x^2 + 4x > (6-x)^2 \Leftrightarrow x^2 + 16x - 36 > 0 \Leftrightarrow x < -18$ hoặc $x > 2$

Kết hợp đk ta có tập nghiệm BPT là S =(2; 6)

191/ 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y - xy^2 = 2xy(1-x) \\ (x^2+2y^2)(1+\dfrac{1}{xy})^2 = 9 \end{cases}$

2.Giải phương trình: $(6x+1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x+1)+(x-1)\log_{\sqrt{2}}(x+1)^3 - 7 = 0$

3. Giải phương trình: $2^{\sqrt[3]{2-x}-1} - 4^{x-1} = 4x^3 - 6x^2 + \dfrac{7}{2}x - \dfrac{3}{2}$

Giải:

1/ Điều kiện Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - xy^2 + 2x^2y = 2xy \\ (x^2+2y^2)(1+\dfrac{1}{xy})^2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)(1+xy) = 2xy \\ (x^2+2y^2)(\dfrac{1+xy}{xy})^2 = 12 \end{cases}$ $x, y \neq 0$.

Do $1+xy \neq 0$,nên hệ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = \dfrac{2xy}{(1+xy)} \\ (x^2+2y^2) = 12(\dfrac{xy}{1+xy})^2 \end{cases} \Rightarrow 12(2x-y)^2 = 4(x^2+2y^2) \Leftrightarrow 11x^2 - 12xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 11x \end{array}\right.$$

+Với $y = x$ thay vào hê ta được :x=y=1

+Với y=11x thay vào ta được hệ vô nghiệm

Vây hệ có nghiệm (1;1)

2/ Giải phương trình: $(6x+1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x+1)+(x-1)\log_{\sqrt{2}}(x+1)^3 - 7 = 0$

HD: Điều kiện:x>-1 :Phương trình $\Leftrightarrow (6x+1)\log^2_2(x+1)+(6x-6)\log_2(x+1) - 7 = 0$

Đặt $t = \log_2(x+1)$,Phương trình trở thành: $(6x+1)t^2 + (6x-6)t - 7 = 0$ (*)

+Nếu $6x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{6}$;Pt $: -7.\log_2\dfrac{5}{6} - 7 = 0$:Vô lý

+Nếu $6x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\dfrac{1}{6}$:Pt (*) có *a-b+c=0* nên(*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \dfrac{7}{6x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{2} \\ \log_2(x+1) = \dfrac{7}{6x+1} \text{(1)} \end{array}\right.$

Ta có (1) $\Leftrightarrow \log_2(x+1) - \dfrac{7}{6x+1} = 0$;Đặt $f(x) = \log_2(x+1) - \dfrac{7}{6x+1}$, $\forall x \in (-1;\dfrac{-1}{6}) \cup (\dfrac{-1}{6};+\infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln 2} + \frac{42}{(6x+1)^2} > 0 \ , \forall x \in (-1;\frac{-1}{6}) \cup (\frac{-1}{6};+\infty)$$

Do đó hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;\dfrac{-1}{6})$ và $(\dfrac{-1}{6};+\infty)$.

+Hàm số đồng biến trên $(-1;\frac{-1}{6})$ nên phương trình có nhiều nhất một nghiệm trên $(-1;\frac{-1}{6})$

Thử với $x=\frac{-3}{4}$: (1) $\Leftrightarrow \log_2(\frac{1}{4})+2=0$ Đúng.

+Hàm số đồng biến trên $(\frac{-1}{6};+\infty)$ nên phương trình có nhiều nhất một nghiệm trên $(\frac{-1}{6};+\infty)$

Thử với x=1 ta được: (1) $\Leftrightarrow \log_2 2-1=0$ Đúng.

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm: $x=\frac{-3}{4}$; $x=\frac{-1}{2}$; x=1

3/ Giải phương trình: $2^{\sqrt[3]{2-x}-1}-4^{x-1}=4x^3-6x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{2}$

Hd: Phương trình $\Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{2-x}-1}-4^{x-1}=4x^3-6x^2+\frac{7}{2}x-\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{2-x}}-2^{2x-1}=8x^3-12x^2+7x-3$

$2^{\sqrt[3]{2-x}}+2-x=2^{2x-1}+8x^3-12x^2+6x-1 \Leftrightarrow 2^{\sqrt[3]{2-x}}+2-x=2^{2x-1}+(2x-1)^3$

Xét hàm số: $f(t)=2^t+t^3$ có $f'(t)=2^t\ln 2+3t^2>0 \quad \forall t\in R$. Do đó f(t) đồng biến trên R

Phương trình: $\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{2-x})=f(2x-1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{2-x}=2x-1$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow 8x^3-12x^2+7x-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(8x^2-4x+3)=0 \Leftrightarrow x=1$ có nghiệm x=1.

192/ :

1.Giải phương trình: $\sqrt{36x^2-63x+27}=15-27x+2\sqrt{9x^2-9x+3}$.

2.Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\sqrt{x+1}+\sqrt{y+15}=\frac{x+y}{2}$ Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P=x+y$.

3. Tìm m để phương trình $12\sqrt{4+x-3x^2}=3x-24+m\left(3\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-3x}\right)$ có nghiệm .

4.Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{\log_2 x}{1+(\log_2 x)^2}+\frac{\log_2 y}{1+(\log_2 y)^2}=\frac{9}{10} \\ \left(1+\log_x 2.\log_y 2\right)\log_2 xy=\frac{9}{2} \end{cases}$$

Giải:

1) Từ dấu hiệu $\sqrt{36x^2-63x+27}$; $2\sqrt{9x^2-9x+3}=\sqrt{36x^2-36x+12}$

Nhân liên hợp và biện luận ta được nghiệm duy nhất $x=\frac{15}{27}$

2.HD.(*nhiều cách*) Đặt $\sqrt{x+1}=u\geq 0$; $\sqrt{y+15}=v\geq 0$ ta đưa được về hệ PT đối xứng. Từ đk PT có nghiệm không âm ta tìm được $2\left(1+\sqrt{17}\right)\leq P\leq 16$

3.HD. ĐK. Đặt $t=3\sqrt{x+1}+2\sqrt{4-3x} \to t\in\left[\sqrt{21};\ 7\right]$ ta chỉ việc tìm GTLN,NN trên đoạn này của hàm số $f(t)=t-\frac{1}{t}$

4. ĐK, đặt $\log_2 x = u; \log_2 y = v$ và $u + \frac{1}{u} = m; v + \frac{1}{v} = n \quad (|m,n| \geq 2)$

Ta được 4 nghiệm $(4,2), (2;\sqrt{2})$ và giao hoán của bộ số.

193. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$

Giải:

Đặt $u = \sqrt[3]{x+34}, v = \sqrt[3]{x-3}$. Ta cã :

$$\begin{cases} u - v = 1 \\ u^3 - v^3 = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)(u^2 + v^2 + uv) = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ (u-v)^2 + 3uv = 37 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = 1 \\ uv = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = -3 \\ v = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 4 \\ v = 3 \end{cases} \end{array} \right.$$

Với u = -3 , v = - 4 ta có: x = - 61 ;

Với u = 4, v = 3 ta có: x = 30

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm : x = -61 và x = 30

194/ $\begin{cases} (3x+y)(x+3y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)(x^2 + y^2 + 14xy) = 36 \end{cases}$

Giải:

$$\begin{cases} (3x+y)(x+3y)\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)(x^2 + y^2 + 14xy) = 36 \end{cases}$$

Đk: $xy \geq 0$ Hệ ban đầu tương đương $\begin{cases} [3(x+y)^2 + 4xy]\sqrt{xy} = 14 \\ (x+y)[(x+y)^2 + 12xy] = 36 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = x + y \\ b = \sqrt{xy} \geq 0 \end{cases}$ thay vào hệ trên được $\begin{cases} (3a^2 + 4b^2)b = 14 \\ a(a^2 + 12b^2) = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 b + 4b^3 = 14 \\ a^3 + 12ab^2 = 36 \end{cases}$

Nhận thấy a=0 không là nghiệm của hệ trên. Đặt b=ka thay vào hệ trên được $\begin{cases} a^3(3k + 4k^3) = 14 \\ a^3(1 + 12k^2) = 36(1) \end{cases}$. Ta suy ra phương trình $72k^3 - 84k^2 + 54k - 7 = 0$ $\Leftrightarrow k = \frac{1}{6} \Rightarrow b = \frac{1}{6}a \Rightarrow a = 6b$ thay vào (1) được a=3, từ đó b=1/2

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ \sqrt{xy} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \end{cases} hoac \begin{cases} x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

195/. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x-1} + x^2 - x - 2 = 0 \quad (x \in \square)$

Giải: Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3} - \sqrt{x-1} + x^2 - x - 2 = 0 \quad (x \in \square)$

ĐK: $\begin{cases} x^2 - 3 \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$; Đặt $u = \sqrt{x^2 - 3}, u \geq 0$, $\quad v = \sqrt{x-1}, v \geq 0$

Suy ra: $u^2 - v^2 = x^2 - x - 2$

Ta được phương trình: $u - v + u^2 - v^2 = 0$

$\Leftrightarrow u - v + (u+v)(u-v) = 0 \Leftrightarrow (u-v)(1+u+v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v = -1 \end{array}\right.$

Vì $u \geq 0; v \geq 0$ nên loại $u + v = -1$

Khi u = v $\Rightarrow \sqrt{x^2 - 3} = \sqrt{x - 1} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vì $x \geq \sqrt{3}$, nên $x = -1$ loại. Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = 2$.

196/. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8(\sqrt{x-y} + 2) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$.

Giải:

Điều kiện: *x+y>0, x-y>0*

$\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+y} = 3\log_8(2 + \sqrt{x-y}) \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y} = 2 + \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2 + y^2 + 1} - \sqrt{x^2 - y^2} = 3 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{u} - \sqrt{v} = 2 \ (u > v) \\ \sqrt{\dfrac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 \\ \sqrt{\dfrac{u^2 + v^2 + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 2\sqrt{uv} + 4 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2 - 2uv + 2}{2}} - \sqrt{uv} = 3 & (2) \end{cases}$. Thế (1) vào (2) ta có:

$\sqrt{uv + 8\sqrt{uv} + 9} - \sqrt{uv} = 3 \Leftrightarrow uv + 8\sqrt{uv} + 9 = (3 + \sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv = 0$. Kết hợp (1) ta có:

$\begin{cases} uv = 0 \\ u + v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow u = 4, v = 0$ (vỡ *u>v*). Từ đó ta có: *x* =2; *y* =2.(T/m)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: (*x; y*)=(2; 2).

197/. 1.Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + (\sqrt{2y} - \sqrt{x})(\sqrt{2y} + \sqrt{x})^2 \end{cases}$

2. Giải bất phương trình $\dfrac{\log_3(x+1)^2 - \log_4(x+1)^3}{x^2 - 5x - 6} > 0$

Giải:

1/ ĐK: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq y \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y - x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ x - 2y = (2y - x)(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ (2y - x)[(\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases}$

(do $\sqrt{2y} + \sqrt{x})(\sqrt{x-y} + \sqrt{y}) + 1 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^x + 4.2^{3x-2y} = 0 \\ 2y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \ \ (1) \\ 2y = x \ \ (2) \end{cases}$$

Giải (1): $3^{2x} - 5.6^x + 4.2^{2x} = 0 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{2x} - 5.(\frac{3}{2})^x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\frac{3}{2})^x = 1 \\ (\frac{3}{2})^x = 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_{\frac{3}{2}} 4 \end{array} \right.$

Với x = 0 thay vao (2) ta được y = 0

Với $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$ thay vao (2) ta được y = $\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}} 4$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \log_{\frac{3}{2}} 4$,y = $\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}} 4$

198/ 1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 2x = 5y \\ (x^2 + 2x)(x + y - 3) = -3y \end{cases}$ $(x; y \in R)$

2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(y - x) - \log_2 x = 1 \\ \sqrt{2y+3} - \sqrt{2x-1} = 2 \end{cases}$

Giải:

1/ Nếu y = 0 $\Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array} \right.$ $\Rightarrow$ hệ có nghiệm (0;0);(-2;0)

Nếu $y \neq 0$, hpt $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{y} + x + y = 5 \\ \frac{x^2 + 2x}{y}.(x + y - 3) = -3 \end{cases}$;đặt $\begin{cases} u = \frac{x^2 + 2x}{y} \\ v = x + y - 3 \end{cases}$ ta có hệ:

$\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{y} = 3 \\ x + y - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -6 \\ y = 8 \end{cases}$

Với $\begin{cases} u = -1 \\ v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{y} = -1 \\ x + y - 3 = 3 \end{cases}$ (vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm (x; y) là: (0; 0) ; (-2; 0); (1; 1) và (-6; 8)

2/ Đk: $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y > x \end{cases}$; Pt hai $\Leftrightarrow \sqrt{2y+3} = 2 + \sqrt{2x-1} \Leftrightarrow y - x = 2\sqrt{2x-1}$

Thế vào pt còn lại ta được :

$2\log_2 2\sqrt{2x-1} - \log_2 x = 1 \Leftrightarrow \log_2 \frac{4(2x-1)}{x} = 1 \Leftrightarrow 4(2x-1) = 2x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$,(tmđk)

KL: hệ có nghiệm (x;y) là $(\frac{2}{3}; \frac{2}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}})$

199/ 1) Giải phương trình sau: $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2$.

2/ Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2009^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2010}{y^2+2010} \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 \end{cases}$$

Giải:* *1/+) ĐK: $x\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})\setminus\{0\}$

+) Đặt $y=\sqrt{2-x^2}, y>0$ Ta có hệ: $\begin{cases} x+y=2xy \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

+) Giải hệ đx ta được x = y = 1 và $\begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

+) Kết hợp điều kiện ta được: x = 1 và $x=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$

2/ $\begin{cases} 2009^{y^2-x^2}=\dfrac{x^2+2010}{y^2+2010} (1) \\ 3\log_3(x+2y+6)=2\log_2(x+y+2)+1 (2) \end{cases}$

+) ĐK: x + 2y = 6 > 0 và x + y + 2 > 0

+) Lấy loga cơ số 2009 và đưa về pt: $x^2+\log_{2009}(x^2+2010)=y^2+\log_{2009}(y^2+2010)$

+) Xét và CM HS $f(t)=t+\log_{2009}(t+2010), t\geq 0$ đồng biến,
từ đó suy ra $x^2 = y^2 \Leftrightarrow$ x= y, x = - y

+) Với x = y thế vào (2) và đưa về pt: $3\log_3(x+2) = 2\log_2(x+1) = 6t$

Đưa pt về dạng $\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{8}{9}\right)^t=1$, cm pt này có nghiệm duy nhất t = 1

$\Rightarrow$ x = y =7

+) Với x = - y thế vào (2) được pt: $\log_3(y + 6) = 1 \Rightarrow$ y = - 3 $\Rightarrow$ x = 3

200. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$

Giải:

$$.\begin{cases}2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\\2y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-y)+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{y}\right)\\2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-y)=-\dfrac{4(x-y)}{xy}\\2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=y\\xy=-2\end{array}\right.\\2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=y\\2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x}\end{cases}\\\begin{cases}y=-\dfrac{2}{x}\\2x-\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{x}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\x=y=-1\\x=\sqrt{2},y=-\sqrt{2}\\x=-\sqrt{2},y=\sqrt{2}\end{array}\right.$$

201. Giải phương trình : $(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=5x^2+\dfrac{3}{2}x-3$

Giải:

PT $\Leftrightarrow 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=10x^2+3x-6$

$2(3x+1)\sqrt{2x^2-1}=4(2x^2-1)+2x^2+3x-2$. Đặt $t=\sqrt{2x^2-1}(t\geq 0)$

Pt trở thành $4t^2-2(3x+1)t+2x^2+3x-2=0$

Ta có: $\Delta'=(3x+1)^2-4(2x^2+3x-2)=(x-3)^2$ Từ đó ta có phương trình có nghiệm : $t=\dfrac{2x-1}{2};t=\dfrac{x+2}{2}$

Thay vào cách đặt giải ra ta được phương trình có các nghiệm: $x\in\left\{\dfrac{-1+\sqrt{6}}{2};\dfrac{2+\sqrt{60}}{7}\right\}$

202. Giải bất phương trình : $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}>24.$ (2)

Giải: Giải bất phương trình : $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}>24.$ (2)

(2) $\Leftrightarrow 5\left(5^{x^2}\right)^2-24\left(5^{x^2}\right)-5\succ 0\Leftrightarrow 5^{x^2}\succ 5\Leftrightarrow x^2>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\succ 1\\x\prec -1\end{array}\right.$

203. 1) $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y\\y(x+y)^2=2x^2+7y+2\end{cases}$; 2) $\begin{cases}2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)]+2\log_{2+y}(1-x)=6\\\log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1\end{cases}$

Giải: 1) $y\neq 0$, ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+xy+1=4y\\y(x+y)^2=2x^2+7y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{y}+x+y=4\\(x+y)^2-2\dfrac{x^2+1}{y}=7\end{cases}$.

Đặt $u=\dfrac{x^2+1}{y},v=x+y$ ta có hệ: $\begin{cases}u+v=4\\v^2-2u=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=4-v\\v^2+2v-15=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}v=3,u=1\\v=-5,u=9\end{array}\right.$

+) Với $v=3,u=1$ ta có hệ: $\begin{cases}x^2+1=y\\x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1=y\\y=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-2=0\\y=3-x\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,y=2\\x=-2,y=5\end{array}\right.$.

+) Với $v=-5, u=9$ ta có hệ: $\begin{cases} x^2+1=9y \\ x+y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1=9y \\ y=-5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+9x+46=0 \\ y=-5-x \end{cases}$, hệ này vô nghiệm.

KL: Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=\{(1;2),(-2;5)\}$.

2) + Điều kiện: $\begin{cases} -xy-2x+y+2>0,\ x^2-2x+1>0,\ y+5>0,\ x+4>0 \\ 0<1-x\neq 1,\ 0<2+y\neq 1 \end{cases} (I)$.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)]+2\log_{2+y}(1-x)=6 \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2)+\log_{2+y}(1-x)-2=0\ (1) \\ \log_{1-x}(y+5)-\log_{2+y}(x+4)=1\ (2). \end{cases}$

Đặt $\log_{2+y}(1-x)=t$ thì (1) trở thành: $t+\frac{1}{t}-2=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$.

Với $t=1$ ta có: $1-x=y+2 \Leftrightarrow y=-x-1\ (3)$. Thế vào (2) ta có:

$\log_{1-x}(-x+4)-\log_{1-x}(x+4)=1 \Leftrightarrow \log_{1-x}\frac{-x+4}{x+4}=1 \Leftrightarrow \frac{-x+4}{x+4}=1-x \Leftrightarrow x^2+2x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=1 \end{array}\right.$.

+ Kiểm tra thấy chỉ có $x=-2, y=1$ thoả mãn điều kiện trên.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=-2, y=1$.

204. Giải phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2(4x)\quad (2)$

Giải:

Điều kiện: $0<x\neq 1$; $(2) \Leftrightarrow (x+3)|x-1|=4x$

Trường hợp 1: $x>1$ $(2) \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow x=2$

Trường hợp 2: $0<x<1$ $(2) \Leftrightarrow x^2+6x-3=0 \Leftrightarrow x=2\sqrt{3}-3$

Vậy tập nghiệm của (2) là $T=\{2;2\sqrt{3}-3\}$

205. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{3-y}=\sqrt{3} \\ \sqrt{y}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3} \end{cases}$

Giải: Điều kiện: $0\le x\le 3, 0\le y\le 3$

Ta có $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{3-y}=\sqrt{3} \\ \sqrt{y}+\sqrt{3-x}=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2\sqrt{x(3-y)}=0 \\ y-x+2\sqrt{y(3-x)}=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{x(3-y)}+\sqrt{y(3-x)}=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x(3-y)=0 \\ y(3-x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$ Kiểm tra ta thấy $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ thỏa mãn.

Kết luận : Hệ có hệ có hai nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$

206. Giải bất phương trình : $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}>24.\qquad (2)$

Giải:

Giải bất phương trình : $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} > 24.$ (2)

$$(2) \Leftrightarrow 5\left(5^{x^2}\right)^2 - 24\left(5^{x^2}\right) - 5 \succ 0 \Leftrightarrow 5^{x^2} \succ 5 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \succ 1 \\ x \prec -1 \end{array}\right.$$

207. 1/ Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

2/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Giải :

1/ Giải phương trình: $\sqrt{7-x^2+x\sqrt{x+5}} = \sqrt{3-2x-x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ 7-x^2+x\sqrt{x+5} = 3-2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x-x^2 \geq 0 \\ x\sqrt{x+5} = -2(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \\ \sqrt{x+5} = -2.\dfrac{x+2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ (x+1)(x^2-16) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$ Vậy phương trình đã cho có một nghiệm x = - 1.

2/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \dfrac{1}{y} = 1 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Điều kiện: $\begin{cases} y-x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4(y-x) + \log_4 \dfrac{1}{y} = -1 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 \dfrac{y-x}{y} = -1 \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y-x}{y} = \dfrac{1}{4} \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ x^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 9y^2+y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ y^2 = \dfrac{25}{10} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y) = \left(\dfrac{15}{\sqrt{10}}; \dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \\ (x;y) = \left(-\dfrac{15}{\sqrt{10}}; -\dfrac{5}{\sqrt{10}}\right) \end{array}\right.$$ (không thỏa mãn đk)

Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

208 1/ Giải phương trình: $x^2 - 4x - 3 = \sqrt{x+5}$

2/ Giải phương trình : $2^{\log_5(x+3)} = x$

Giải:

1/ $x^2 - 4x + 3 = \sqrt{x+5}$ (1)

TX§ : $D = [-5;+\infty)$ $(1) \Leftrightarrow (x-2)^2 - 7 = \sqrt{x+5}$

®Æt $y - 2 = \sqrt{x+5}$, $y \ge 2 \Rightarrow (y-2)^2 = x+5$

Ta cã hÖ : $\begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (y-2)^2 = x+5 \\ y \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ (x-y)(x+y+3) = 0 \\ y \ge 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} (x-2)^2 = y+5 \\ x+y+3=0 \end{cases} \end{array}\right. \\ y \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{5+\sqrt{29}}{2} \\ x = -1 \end{array}\right.$$

2/ ĐK : $x > 0$ PT đã cho tương đương với : $\log_5(x+3) = \log_2 x$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$, suy ra $x = 2^t$

$(2) \Leftrightarrow \log_5(2^t + 3) = t \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1$ (2)

Xét hàm số : $f(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t + 3\left(\frac{1}{5}\right)^t$; $f'(t) = \left(\frac{2}{3}\right)^t \ln 0,4 + 3\left(\frac{1}{5}\right)^t \ln 0,2 < 0, \forall t \in \mathbf{R}$

Suy ra f(t) nghịch biến trên R

Lại có : f(1) = 1 nên PT (2) có nghiệm duy nhất t = 1 hay $\log_2 x = 1$ hay x =2

Vậy nghiệm của PT đã cho là : x = 2

208. Giải bất phương trình: $(4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \ge 8x-6$ (1)

Giải: Giải bất phương trình: $(4x-3)\sqrt{x^2-3x+4} \ge 8x-6$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow (4x-3)\left(\sqrt{x^2-3x+4} - 2\right) \ge 0$$

Ta có: 4x-3=0<=>x=3/4

$\sqrt{x^2-3x+4} - 2$=0<=>x=0;x=3

Bảng xét dấu:

x	-∞		0		¾		2		+ ∞
4x-3		-	|	-	0	+	|	+	
$\sqrt{x^2-3x+4} - 2$		+	0	-	|	-	0	+	
Vế trái		-	0	+	0	-	0	+	

Vậy bất phương trình có nghiệm: $x \in \left[0;\frac{3}{4}\right] \cup [3;+\infty)$

209. 1/ Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 1 = \dfrac{7}{xy} \end{cases}$

2/ Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) > \log_2\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

3/ Giải bất phương trình : $3^{\sqrt{x+1}}+3^{1-\sqrt{x+1}}-4\geq 0$

Giải:

1/ Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2+x+y-2xy=8\\ (x+y)^2-xy=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+y=3\\ x+y=-2\end{array}\right.\\ x+y-xy=1\end{cases}$:

Vậy nghiệm của hệ là : (x;y) = (1 ;2) ,(2 ; 1) ,(1;-3) (-3; 1)

2/

Đk x > 0: Bpt $\Leftrightarrow \log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\log_3\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}\right)\right)<0$

$\Leftrightarrow \log^2{}_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1 \Leftrightarrow 0<\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}+x<5$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}<5-x \Leftrightarrow \begin{cases}5-x>0\\ x^2+1<(5-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow x<\frac{12}{5}$

Kết hợp đk ta có 0 < x < $\frac{12}{5}$

3/ Đk : $x\geq -1$

Pt $\Leftrightarrow 3^{2\sqrt{x+1}}-4.3^{\sqrt{x+1}}+3\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{\sqrt{x+1}}\geq 3\\ 3^{\sqrt{x+1}}\leq 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}\geq 1\\ \sqrt{x+1}\leq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 0\\ x=-1\end{array}\right.$

Nghiệm bất pt là : T = $\{-1\}\cup[0;+\infty)$

210. 1.Giải hệ phương trình : $\begin{cases}x^4-x^3y+x^2y^2=1\\ x^3y-x^2+xy=-1\end{cases}$

2)Giải phương trình: $Log_{x(24x+1)^2}x+\log_{x^2(24x+1)}x^2=\log_{(24x+1)}x$

3)Giải bất phương trình: $\log_x(\log_3(9^x-72))\leq 1$

Giải:

1/*Biến đổi hệ tương đương với $\begin{cases}(x^2-xy)^2=1-x^3y\\ x^3y-(x^2-xy)=-1\end{cases}$

*Đặt ẩn phụ $\begin{cases}x^2-xy=u\\ x^3y=v\end{cases}$, ta được hệ $\begin{cases}u^2=1-v\\ v-u=-1\end{cases}$

*Giải hệ trên được nghiệm (u;v) là (1;0) và (-2;-3)

*Từ đó giải được nghiệm (x;y) là (1;0) và (-1;0)

2/ *Điều kiện :x>0

*TH1 : xét x=1 là nghiệm

*TH2 : xét $x\neq 1$, biến đổi phương trình tương đương với

$$\frac{1}{1+2\log_x(24x+1)}+\frac{2}{2+\log_x(24x+1)}=\frac{1}{\log_x(24x+1)}$$

Đặt $\log_x(x+1) = t$, ta được phương trình

$$\frac{1}{1+2t} + \frac{2}{2+t} = \frac{1}{t}$$ giải được t=1 và t=-2/3

*Với t=1 $\Rightarrow \log_x(x+1) = 1$ phương trình này vô nghiệm

*Với t=-2/3 $\Rightarrow \log_x(x+1) = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow x^2.(24x+1)^3 = 1 \quad (*)$$

Nhận thấy $x = \frac{1}{8}$ là nghiệm của (*)

Nếu $x > \frac{1}{8}$ thì VT(*)>1

Nếu $x < \frac{1}{8}$ thì VT(*)<1 , vậy (*) có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{8}$

*Kết luận : Các nghiệm của phương trình đã cho là x=1 và $x = \frac{1}{8}$

3/ *Điều kiện : $\begin{cases} x > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \\ 9^x - 72 > 0 \end{cases}$ giải được $x > \log_9 73$

Vì $x > \log_9 73 > 1$ nên bpt đã cho tương đương với

$$\log_3(9^x - 72) \le x \Leftrightarrow 9^x - 72 \le 3^x \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x \ge -8 \\ 3^x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x \le 2$$

*Kết luận tập nghiệm : $T = (\log_9 72; 2]$

211. 1. Giải bất phương trình $\log_2(4x^2 - 4x + 1) - 2x > 2 - (x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - x\right)$

2/ Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1} \end{cases}$

Giải:

1/ ĐK: $\begin{cases} \frac{1}{2} - x > 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \ne \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \qquad (*)$

Với điều kiện (*) bất phương trình tương đương với: $2\log_2(1-2x) - 2x > 2 + (x+2)[\log_2(1-2x) - 1]$

$\Leftrightarrow x[\log_2(1-2x) + 1] < 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \log_2(1-2x) + 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \log_2(1-2x) + 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 2(1-2x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \log_2 2(1-2x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ 2(1-2x) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 2(1-2x) > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{4} \\ x < 0 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta có: $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$ hoặc $x < 0$.

2/ $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x^2+1+xy=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x(3x+y-1)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x+y-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x\ge -1 \\ y=1-3x \end{cases} \end{array}\right.$

* Với x = 0 thay vào (1) $2+2^{y-2}=3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y=12.2^y \Leftrightarrow 2^y=\frac{8}{11} \Leftrightarrow y=\log_2\frac{8}{11}$

* Với $\begin{cases} x\ge -1 \\ y=1-3x \end{cases}$ thay y = 1 – 3x vào (1) ta được: $2^{3x+1}+2^{-3x-1}=3.2$

Đặt $t=2^{3x+1}$ Vì $x\ge -1$ nên $t\ge\frac{1}{4}$

(3) $\Leftrightarrow t+\frac{1}{t}=6 \Leftrightarrow t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3-\sqrt{8}(\text{loại}) \\ t=3+\sqrt{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+\sqrt{8}\right)-1\right] \\ y=2-\log_2(3+\sqrt{8}) \end{cases}$

212 **1.** Giải phương trình: $\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}}=1+\sqrt{3+2x-x^2}$

2.Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y=y+\log_2 x \\ x\log_3 12+\log_3 x=y+\log_3 y \end{cases}$.

Giải: 1/ TXĐ: $x\in[-1;3]$ Đặt t= $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$, t > 0 => $\sqrt{3+2x-x^2}=\frac{t^2-4}{2}$

đc pt: t^3 - 2t - 4 = 0 ⇔ t=2 Với t = 2 ⇔ $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$ =2 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. (t/m)$

2/ TXĐ: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\log_2 3+\log_2 y=y+\log_2 x \\ x\log_3 12+\log_3 x=y+\log_3 y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x.y=2^y.x \\ 12^x.x=3^y.y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x \\ 3^x.y=2^y.x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_{\frac{4}{3}} 2 \\ y=2\log_{\frac{4}{3}} 2 \end{cases}$ (t/m TXĐ)

213. Giải bất phương trình: $\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1$.

Giải:

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 1-x<0 \\ 51-2x-x^2\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1-x>0 \\ 51-2x-x^2\ge 0 \\ 51-2x-x^2<(1-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ x\in\left[-1-\sqrt{52};-1+\sqrt{52}\right] \end{cases} \\ \begin{cases} x<1 \\ x\in(-\infty;-5)\cup(5;+\infty) \\ x\in\left[-1-\sqrt{52};-1+\sqrt{52}\right] \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[-1-\sqrt{52};-5\right)\cup\left(1;-1+\sqrt{52}\right]$$

214. a)Giải bất phương trình: $9^{2x-x^2+1} - 34.15^{2x-x^2} + 25^{2x-x^2+1} > 0$

b)Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm : $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ x + y = 2a+1 \end{cases}$

Giải: a) $9^{2x-x^2+1} - 34.15^{2x-x^2} + 25^{2x-x^2+1} > 0 \Leftrightarrow 9.3^{2(2x-x^2)} - 34.3^{2x-x^2}.5^{2x-x^2} + 25.5^{2(2x-x^2)} > 0$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{5}\right)^{2(2x-x^2)} - 34.\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} + 25 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} < 1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} > \frac{25}{9} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - x^2 > 0 \\ 2x - x < -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (0;2) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$$

KL: Bpt có tập nghiệm là T= $(-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (0;2) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$

b) đ/k $x \ge -1; y \ge 1$ **.Bất pt** $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ (\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{y-1})^2 = 2a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1}.\sqrt{y-1} = \frac{1}{2}\left[a^2 - (2a+1)\right] \end{cases}$; Vậy

$\sqrt{x+1}$ và $\sqrt{y-1}$ là nghiệm của p/t: $T^2 - aT + \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) = 0$*.Rõ ràng hệ trên có nghiệm khi p/t*

có 2 nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 2(a^2 - 2a - 1) \ge 0 \\ a \ge 0 \\ \frac{1}{2}(a^2 - 2a - 1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 + \sqrt{2} \le a \le 2 + \sqrt{6}$

215. 1/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases}$ (x, y∈ R)

2/ Giải bất phương trình $2^{\log^2_{\sqrt{2}} x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$

Giải:

1/ ĐK: x + y ≥ 0 , x - y ≥ 0, y ≥ 0

PT(1) $\Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \ge 0 & (3) \\ 5y^2 = 4xy & (4) \end{cases}$

Từ PT(4) ⇔ y = 0 v 5y = 4x

Với y = 0 thế vào PT(2) ta có x = 9 (Không thỏa mãn đk (3))

Với 5y = 4x thế vào PT(2) ta có $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

KL: HPT có 1 nghiệm $(x;y) = \left(1; \frac{4}{5}\right)$

2/ Điều kiện: x> 0 ; BPT ⇔ $2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$ Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $x = 2^t$.

BPT trở thành $4^{2t^2} + 2^{2t^2} - 20 \le 0$. Đặt y = 2^{2t^2} ; y ≥ 1.

BPT trở thành y^2 + y - 20 ≤ 0 ⇔ - 5 ≤ y ≤ 4.

Đối chiếu điều kiện ta có : $2^{2t^2} \le 4 \Leftrightarrow 2t^2 \le 2 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow$ - 1 ≤ t ≤ 1.

Do đó $-1 \le \log_2 x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2$

216. 1/Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$$

2/ Giải bất phương trình: $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$

Giải:

1/ $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \ (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \quad (2) \end{cases} \qquad (dk\ x+y>0)$

$(1) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 2xy + \dfrac{2xy}{x+y} - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^3 - 2xy(x+y) + 2xy - (x+y) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)\left((x+y)^2 - 1\right) - 2xy(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)\left[(x+y)(x+y+1) - 2xy\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \quad (3) \\ x^2+y^2+x+y=0 \quad (4) \end{array}\right.$

Dễ thấy (4) vô nghiệm vì x+y>0 ; Thế (3) vào (2) ta được $x^2 - y = 1$

Giải hệ $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2 - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1; y=0 \\ x=-2; y=3 \end{array}\right.$ ……

2/ $\log_{\frac{1}{3}} \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) > \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) \quad (1)$

Đk: $x > 0$

$(1) \Leftrightarrow \log_3 \log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \log_3 \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < 0$

$\Leftrightarrow \log_3 \left(\log_{\frac{1}{5}} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right).\log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \right) < 0$

$\Leftrightarrow \log_5^2 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < 1$

$\Leftrightarrow 0 < \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < 1$*) $\qquad 0 < \log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) \Leftrightarrow x > 0$

*) $\log_5 \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) < 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} + x < 5 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < 5 - x \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow x < \dfrac{12}{5}$

Vậy BPT có nghiệm $x \in \left(0; \dfrac{12}{5}\right)$

217.

1. Giải phương trình: $\left(2-\log_3 x\right)\log_{9x} 3-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1$

2. Gi¶i bÊt ph¬ng tr×nh: $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}\geq\sqrt{x-3}$

3. Giải phương trình : $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$

Giải:

1. Phương trình: $(2-\log_3 x)\log_{9x} 3-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1 \quad (1)$

$(1)\Leftrightarrow(2-\log_3 x)\dfrac{1}{\log_3 9x}-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1\Leftrightarrow\dfrac{2-\log_3 x}{2+\log_3 x}-\dfrac{4}{1-\log_3 x}=1$

đặt: $t=\log_3 x$ thành $\dfrac{2-t}{2+t}-\dfrac{4}{1-t}=1\Leftrightarrow t^2-3t-4=0$ (vì t = -2, t = 1 không là nghiệm)

$\Leftrightarrow t=-1$ hay $t=4$; Do đó, $(1)\Leftrightarrow\log_3 x=-1$ hay $x=4\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$ hay $x=81$

2. §k: $x\geq 3$

Bpt $\Leftrightarrow\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x-2}+\sqrt{x-3}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-5x+6}\leq 4-x$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-x\geq 0\\3x^2-12x+8\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\leq x\leq 4\\\dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}\leq x\leq\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow 3\leq x\leq\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

3. Giải phương trình: $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$

§k: $\dfrac{1}{2}<x\neq 1$; pt $\Leftrightarrow 2\log_3|x-1|+2\log_3(2x-1)=2\Leftrightarrow\log_3|x-1|+\log_3(2x-1)=1$

$\Leftrightarrow\log_3|x-1|(2x-1)=\log_3 3\quad\Leftrightarrow|x-1|(2x-1)=3$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}<x<1\\2x^2-3x+4=0\,(vn)\end{cases}\text{ hoac }\begin{cases}x>1\\2x^2-3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$$

219 . 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2x^2+x-\dfrac{1}{y}=2\\y-y^2x-2y^2=-2\end{cases}$

2.Giải bất phương trình $\dfrac{\log_3(x+1)^2-\log_4(x+1)^3}{x^2-5x-6}>0$

Giải

1. ĐK : $y\neq 0$

hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+x-\dfrac{1}{y}-2=0\\\dfrac{2}{y^2}+\dfrac{1}{y}-x-2=0\end{cases}$ đưa hệ về dạng $\begin{cases}2u^2+u-v-2=0\\2v^2+v-u-2=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=1-v \end{array}\right. \\ 2v^2+v-u-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=1 \\ u=v=-1 \end{array}\right. hoac \begin{cases} u=\dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \\ v=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{2} \end{cases} hoac \begin{cases} u=\dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \\ v=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta có nghiệm của hệ : (-1 ;-1),(1 ;1), $\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2};\dfrac{2}{\sqrt{7}-1}\right)$, $\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};\dfrac{2}{\sqrt{7}+1}\right)$

2. Đk: x > - 1

bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_3(x+1)-\dfrac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)}{x-6}<0 \Leftrightarrow 0<x<6$

220. Giải phương trình :

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(5-2x)+\log_2(5-2x).\log_{2x+1}(5-2x)=\log_2(2x-5)^2+\log_2(2x+1).\log_{\sqrt{2}}(5-2x)$$

Giải: ĐK : $\begin{cases} \dfrac{-1}{2}<x<\dfrac{5}{2}. \\ x\neq 0 \end{cases}$ Với ĐK trên PT đã cho tương đương với

$$\log^2_2(5-2x)+\frac{\log^2_2(5-2x)}{\log_2(2x+1)}=2\log_2(5-2x)+2\log_2(5-2x)\log_2(2x+1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2x+1)=-1 \\ \log_2(5-2x)=2\log_2(2x+1) \\ \log_2(5-2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1}{4} \\ x=\dfrac{1}{2}\vee x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với ĐK trên PT đã cho có 3 nghiệm x=-1/4 , x=1/2 và x=2

222. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2\sqrt{x+y}=3\log_8(\sqrt{x-y}+2) \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$.

Giải

Điều kiện: *x+y>0, x-y>0*

$$\begin{cases} \log_2\sqrt{x+y}=3\log_8(2+\sqrt{x-y}) \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+y}=2+\sqrt{x-y} \\ \sqrt{x^2+y^2+1}-\sqrt{x^2-y^2}=3 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u=x+y \\ v=x-y \end{cases}$ ta có hệ: $\begin{cases} \sqrt{u}-\sqrt{v}=2\ (u>v) \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{uv}+4 \\ \sqrt{\dfrac{u^2+v^2+2}{2}}-\sqrt{uv}=3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=2\sqrt{uv}+4 & (1) \\ \sqrt{\dfrac{(u+v)^2-2uv+2}{2}}-\sqrt{uv}=3\ (2) \end{cases}$. Thế (1) vào (2) ta có:

$\sqrt{uv+8\sqrt{uv}+9}-\sqrt{uv}=3 \Leftrightarrow uv+8\sqrt{uv}+9=(3+\sqrt{uv})^2 \Leftrightarrow uv=0$.Kết hợp (1) ta có:

$\begin{cases} uv=0 \\ u+v=4 \end{cases} \Leftrightarrow u=4, v=0$ (vỡ $u>v$). Từ đó ta có: $x=2$; $y=2$.(T/m)

KL: Vậy nghiệm của hệ là: $(x; y)=(2; 2)$.

Đề số 223 Giải phương trình: $|2006-x|^{2007}+|2007-x|^{2006}=1$

Giải Nhận xét :

$\begin{cases} -1\le x-2006\le 1 \\ -1\le x-2007\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2006\le x\le 2007$

Ta có : $|2006 - x|^{2007} + |2007 - x|^{2006} \le |2006 - x| + |2007 - x| = x - 2006 + 2007 - x = 1$

Vậy phương trình $\Leftrightarrow |2006 - x|^{2007} = |2006 - x|$ và $|2007 - x|^{2006} = |2007 - x|$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2006-x=0 \\ 2006-x=\pm 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2007-x=0 \\ 2007-x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2006 \\ x=2005 \\ x=2007 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=2007 \\ x=2006 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2006$ hay $x = 2007$

224 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0 \\ \sqrt{x-y}=\sqrt{y}+(\sqrt{2y}-\sqrt{x})(\sqrt{2y}+\sqrt{x})^2 \end{cases}$

4. Giải bất phương trình $\dfrac{\log_3(x+1)^2-\log_4(x+1)^3}{x^2-5x-6}>0$

Giải:

2. ĐK: $\begin{cases} x,y\ge 0 \\ x\ge y \end{cases}$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0 \\ \sqrt{x-y}-\sqrt{y}=(2y-x)(\sqrt{2y}+\sqrt{x}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0 \\ x-2y=(2y-x)(\sqrt{2y}+\sqrt{x})(\sqrt{x-y}+\sqrt{y}) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0 \\ (2y-x)[(\sqrt{2y}+\sqrt{x})(\sqrt{x-y}+\sqrt{y})+1]=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0 \\ 2y-x=0 \end{cases}$

(do $\sqrt{2y}+\sqrt{x})(\sqrt{x-y}+\sqrt{y})+1\neq 0$)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x-2y}-5.6^x+4.2^{3x-2y}=0 \\ 2y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{2x}-5.6^x+4.2^{2x}=0 \quad (1) \\ 2y=x \quad (2) \end{cases}$

Giải (1): $3^{2x}-5.6^x+4.2^{2x}=0 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{2x}-5.(\frac{3}{2})^x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (\frac{3}{2})^x=1 \\ (\frac{3}{2})^x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_{\frac{3}{2}}4 \end{array}\right.$

Với x 0 thay vao (2) ta được y = 0

Với $x=\log_{\frac{3}{2}}4$ thay vao (2) ta được $y=\dfrac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}4$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\log_{\frac{3}{2}}4, y=\frac{1}{2}\log_{\frac{3}{2}}4$

4. Đk: x > - 1 ; bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_3(x+1)-\dfrac{3\log_3(x+1)}{\log_3 4}}{(x+1)(x-6)}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_3(x+1)}{x-6}<0 \Leftrightarrow 0<x<6$

225 Giải phương trình: $x^2-4x-3=\sqrt{x+5}$

Giải $x^2-4x+3=\sqrt{x+5}$ (1)

TXĐ : $D=[-5;+\infty)$; $(1)\Leftrightarrow(x-2)^2-7=\sqrt{x+5}$

Đặt $y-2=\sqrt{x+5}$, $y\ge 2\Rightarrow(y-2)^2=x+5$

Ta có hệ $\begin{cases}(x-2)^2=y+5\\(y-2)^2=x+5\\y\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2)^2=y+5\\(x-y)(x+y+3)=0\\y\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)^2=y+5\\x-y=0\end{cases}\\\begin{cases}(x-2)^2=y+5\\x+y+3=0\end{cases}\end{array}\right.\\y\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5+\sqrt{29}}{2}\\x=-1\end{array}\right.$

Đề số 226.

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x+y=2\\4x^2+y^2=5(2x-y)\sqrt{xy}\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$

4.Giải phương trình: $2\log_2^2(x-2)+(4x-7)\log_2(x-2)+2(x-2)=0$.

5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(x+y)+1=\log_2(7x+y)+\log_2 y\\\log_2(3x-y-2)=2x-2y+4\end{cases}$

Giải:

2. ĐK $xy\ge 0$

$4x^2+y^2=5(2x-y)\sqrt{xy}$

$\Leftrightarrow(2x-y)^2+4xy=5(2x-y)\sqrt{xy}\Leftrightarrow(2x-y-\sqrt{xy})(2x-y-4\sqrt{xy})=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x-y-\sqrt{xy}=0\\2x-y-4\sqrt{xy}=0\end{array}\right.$ Với

$2x-y-\sqrt{xy}=0$ ta có $\begin{cases}x+y=2\\3x-2=\sqrt{2x-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow x=y=1$ (thoả mãn)

Với $2x-y-\sqrt{xy}=0$ ta có $\begin{cases}x+y=2\\3x-2=4\sqrt{2x-x^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{22+8\sqrt{6}}{25}\\y=\dfrac{22-8\sqrt{6}}{25}\end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm.

4/Điều kiện: $x>2$, phương trình đã cho tương đương với:

$$\left(2\log_2(x-2)+1\right)\left(\log_2(x-2)+2x-4\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_2(x-2)+1=0 \\ \log_2(x-2)+2x-4=0 \end{array}\right.$$

Với $2\log_2(x-2)+1=0$ ta có $x=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, thoả mãn.

Với $\log_2(x-2)+2x-4=0$, ta có $y=\log_2(x-2)+2x-4$ là hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên $x=\dfrac{5}{2}$ là nghiệm duy nhất. Vậy phương trình có hai nghiệm $x=2+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $x=\dfrac{5}{2}$

5. Điều kiện $\begin{cases} x+y>0 \\ 7x+y>0 \\ y>0 \end{cases}$; Biến đổi phương trình đầu ta được $\log_2 2(x+y)^2=\log_2(7x+y)y$

$$2x^2-3xy+y^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=2x \end{array}\right.$$

Với $y=x$ thế vào phương trình thứ hai ta được $\log_2(2x-2)=4 \Leftrightarrow x=9$

suy ra $x=y=9$, thoả mãn điều kiện.

Với $y=2x$ thế vào phương trình thứ hai ta được $\log_2(x-2)=4-2x \Leftrightarrow \log_2(x-2)+2x-4=0$

$y=\log_2(x-2)+2x-4$ là hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ nên $x=\dfrac{5}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Suy ra $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=5 \end{cases}$, thoả mãn điều kiện. Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x=9 \\ y=9 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=5 \end{cases}$

Đề số 234. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$

Giải:

$$2.\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \\ 2y+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)+\left(\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{y}\right) \\ 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)=-\dfrac{4(x-y)}{xy} \\ 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=y \\ xy=-2 \end{array}\right. \\ 2x+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y \\ 2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{x} \end{cases} \\ \begin{cases} y=-\dfrac{2}{x} \\ 2x-\dfrac{x}{2}=\dfrac{3}{x} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \\ x=\sqrt{2}, y=-\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2}, y=\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Đề số 235 Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

Giải:

§iÒu kiÖn $x > \frac{1}{3}$. (*)

Víi ®k tr^ªn, pt ®· cho $\Leftrightarrow \log_5(3x-1)^2 + 1 = 3\log_5(2x+1)$

$\Leftrightarrow \log_5 5(3x-1)^2 = \log_5(2x+1)^3 \Leftrightarrow 5(3x-1)^2 = (2x+1)^3$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 33x^2 + 36x - 4 = 0 \Leftrightarrow x-2)^2(8x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

§èi chiÕu ®iÒu kiÖn (*), ta cã nghiÖm cña pt lµ $x = 2$.

236. ***1.*** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 2\sqrt{y} \\ \sqrt{x} + \sqrt{5y} = 3 \end{cases}$ (x, y∈ R)

4. Giải bất phương trình $2^{\log^2_{\sqrt{2}} x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$

Giải:

2. **ĐK:** x + y ≥ 0 , x - y ≥ 0, y ≥ 0

PT(1) ⇔ $2x + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - y^2} = 2y - x \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - x \ge 0 & (3) \\ 5y^2 = 4xy & (4) \end{cases}$

Từ PT(4) ⇔ y = 0 v 5y = 4x

Với y = 0 thế vào PT(2) ta có x = 9 (Không thỏa mãn đk (3))

Với 5y = 4x thế vào PT(2) ta có $\sqrt{x} + 2\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 1$

KL: HPT có 1 nghiệm $(x; y) = \left(1; \frac{4}{5}\right)$

1. Điều kiện: x> 0 ; BPT ⇔ $2^{4\log_2^2 x} + x^{2\log_2 x} - 20 \le 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Khi đó $x = 2^t$.

BPT trở thành $4^{2t^2} + 2^{2t^2} - 20 \le 0$. Đặt y = 2^{2t^2} ; y ≥ 1. BPT trở thành y^2 + y - 20 ≤ 0 ⇔ - 5 ≤ y ≤ 4.

Đối chiếu điều kiện ta có : $2^{2t^2} \le 4 \Leftrightarrow 2t^2 \le 2 \Leftrightarrow t^2 \le 1$ ⇔ - 1 ≤ t ≤ 1.

Do đó - 1 ≤ $\log_2 x \le 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le x \le 2$

Đề số 237.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$ $(x, y \in \mathrm{R})$

4. Giải phương trình: $(3^x - 2)\log_3 \frac{x-1}{3} = 4 - \frac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}}$

Giải:

2/ x^2 -3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 0 ⇔ $(x-y)^2$ + 3(x-y) - 4 + 0 ⇔ $\left[\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = -4 \end{array}\right.$

* Với x- y = 1, ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$ ⇔ x = 1; y = 0 và x= -1; y = -2

* Với x - y = -4 ta có $\begin{cases} x - y = -4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$ (Hệ PT vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x; y) = (1; 0) và (x; y) = (-1; -2)

4.Điều kiện: $x > 1$ Thì Pt

$\Leftrightarrow (3^x-2)\log_3\frac{x-1}{3}=4-\frac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}} \Leftrightarrow (3^x-2)[\log_3(x-1)-\log_3 3]=4-\frac{2}{3}3^{x+1}$

$\Leftrightarrow (3^x-2)[\log_3(x-1)-1]=4-2.3^x \Leftrightarrow (3^x-2)\log_3(x-1)+3^x-2=0$

$\Leftrightarrow (3^x-2)[\log_3(x-1)+1]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-2=0\\ \log_3(x-1)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\log_3 2\\ x=\frac{4}{3}\end{array}\right.$; Vậy PT có nghiệm $x=\frac{4}{3}$

Đề số 238 .

1. Giải phương trình $2x^2+x+\sqrt{x^2+3}+2x\sqrt{x^2+3}=9$.

4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^2-y^2=2\\ \log_2(2x+y)-\log_3(2x-y)=1\end{cases}$

Giải:

1/ Đặt $u=\sqrt{x^2+3}>0$ ta có $u^2=x^2+3$. Kết hợp với pt đã cho ta có hệ

$\begin{cases}x(2x+1)+u(2x+1)=9\\ (u-x)(u+x)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(2x+1)(u+x)=9\\ (u-x)(u+x)=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[(u+x)+1-(u-x)](u+x)=9\\ (u-x)(u+x)=3\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}u+x=a\\ u-x=b\end{cases}$, ta có hệ $\begin{cases}(a-b+1)a=9\\ ab=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=-4\\ b=\frac{-3}{4}\end{cases}$.

Nếu $\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+3}+x=3\\ \sqrt{x^2+3}-x=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+3}=3-x\\ \sqrt{x^2+3}=1+x\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

Nếu $\begin{cases}a=-4\\ b=\frac{-3}{4}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sqrt{x^2+3}+x=-4 \ (*)\\ \sqrt{x^2+3}-x=\frac{-3}{4}\end{cases}$ (I)

Ta có $\sqrt{x^2+3}>|x| \Rightarrow \sqrt{x^2+3}+x>|x|+x\geq 0 \Rightarrow$ (*) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ (I) vô nghiệm.

Vậy, pt đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

(***Các cách khác:***

+ ***Đặt*** $t=x+\sqrt{x^2+3}$

+ ***Biến đổi pt thành*** $(2x+1)\sqrt{x^2+3}=9-x-2x^2$, ***đặt đk rồi bình phương hai vế.***

+ ***Biến đổi pt thành*** $(2x+1)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)=9$, ***nhân 2 vế với*** $\sqrt{x^2+3}-x\neq 0,\forall x$ ***)***

4/ $\begin{cases}4x^2-y^2=2 & (1)\\ \log_2(2x+y)-\log_3(2x-y)=1 & (2)\end{cases}$ (I). Đk: $\begin{cases}2x+y>0\\ 2x-y>0\end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \log_2(4x^2-y^2)=\log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(2x+y)+\log_2(2x-y)=1$ (3)

(2) và (3) $\Rightarrow \log_2(2x-y)+\log_3(2x-y)=0$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-y)+\log_2 3.\log_3(2x-y)=0 \Leftrightarrow \log_2(2x-y)\left[1+\log_2 3\right]=0$

$\Leftrightarrow \log_2(2x-y)=0 \Leftrightarrow 2x-y=1$

Vậy, Hệ (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x^2-y^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases} (tm) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy nghiệm hệ pt là $(x;y)=\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right)$.

Đề số 239. 1. Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{-2x^2+5x+3}-2+3x+6x.5^{-x}}{3x.5^{-x}-1}<2$

2. Giải phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2(4x)$ (2)

Giải:

2. Giải phương trình $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3)+\frac{1}{4}\log_4(x-1)^8=\log_2(4x)$ (2)

Điều kiện: $0<x\neq 1$; $(2)\Leftrightarrow (x+3)|x-1|=4x$

Trường hợp 1: $x>1$ $(2)\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow x=2$

Trường hợp 1: $0<x<1$ $(2)\Leftrightarrow x^2+6x-3=0\Leftrightarrow x=2\sqrt{3}-3$

Vậy tập nghiệm của (2) là $T=\{2;2\sqrt{3}-3\}$

Đề số 240.

1/ Giải phương trình : $3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)+(4x+2)\left(1+\sqrt{1+x+x^2}\right)=0$

2/ Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4^{xy^2-y^4}=2^{y^6-x^3} \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 \end{cases}$

Giải:

1/ Phương trình $\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=-(2x+1)\left(2+\sqrt{4+4x+4x^2}\right)$

$\Leftrightarrow 3x\left(2+\sqrt{(3x)^2+3}\right)=-(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)$

Xét hàm số $f(t)=t\left(2+\sqrt{(t)^2+3}\right)$ có $f'(t)=\left(2+\sqrt{(t)^2+3}\right)+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}\succ 0$ với $\forall t$

Vậy hàm số đồng biến nên: $f(3x)=f(-2x-1)\Leftrightarrow 3x=-2x-1\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm $x=-\dfrac{1}{5}$

2 Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(xy^2-y^4)}=2^{y^6-x^3} \ (1) \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6(2) \end{cases}$

Từ (1) $\Leftrightarrow 2y^2(x-y^2)=(y^2-x)(y^4+xy^2+x^4)$

$\Leftrightarrow (y^2-x)(y^4+xy^2+x^4+2y^2)=0\Leftrightarrow x=y^2$ thay vào (2) ta có :

$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6\Leftrightarrow x=1\Leftrightarrow y=\pm 1$

Vậy hệ có nghiệm (1;1) và (1;-1)

Đề số 241.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$ $(x, y \in R)$

4/ Giải phương trình: $(3^x - 2)\log_3 \dfrac{x-1}{3} = 4 - \dfrac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}}$

Giải:

2/ $x^2 - 3x(y-1) + y^2 + y(x-3) = 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 + 3(x-y) - 4 + 0$

$\left[\begin{array}{l} x - y = 1 \\ x - y = -4 \end{array}\right.$

* Với x- y = 1, ta có $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ x = 1; y = 0 và x= -1; y = -2

* Với x - y = -4 ta có $\begin{cases} x - y = -4 \\ x - xy - 2y = 1 \end{cases}$ (Hệ PT vô nghiệm)

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (x; y) = (1; 0) và (x; y) = (-1; -2)

4/ Điều kiện: $x > 1$

$(3^x - 2)\log_3 \dfrac{x-1}{3} = 4 - \dfrac{2}{3}.9^{\frac{x+1}{2}} \Leftrightarrow (3^x - 2)[\log_3(x-1) - \log_3 3] = 4 - \dfrac{2}{3}3^{x+1}$

$\Leftrightarrow (3^x - 2)[\log_3(x-1) - 1] = 4 - 2.3^x \Leftrightarrow (3^x - 2)\log_3(x-1) + 3^x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (3^x - 2)[\log_3(x-1) + 1] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x - 2 = 0 \\ \log_3(x-1) = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_3 2\ (loai) \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm $x = \dfrac{4}{3}$

Đề số 242. Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2 + 2x + 92} \ge x^2 + 2x + \sqrt{x-1} + 1$

Giải: Điều kiện: $x \ge 1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 92} - 10 \ge (x^2 + 2x - 8) + (\sqrt{x-1} - 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x - 8}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} \ge (x-2)(x+4) + \dfrac{x-2}{\sqrt{x-1} + 1}$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} - (x+4) - \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1}\right] \ge 0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left[(x+4)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} - 1\right) - \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1}\right] \ge 0$

Ta có: $(x+4)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 92} + 10} - 1\right) - \dfrac{1}{\sqrt{x-1} + 1} < 0, \forall x \ge 1$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow x - 2 \le 0 \Leftrightarrow x \le 2$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm bất phương trình là: $1 \le x \le 2$

Đề số 243. Giải bất phương trình sau: $\dfrac{\sqrt{-2x^2 + 5x + 3} - 2 + 3x + 6x.5^{-x}}{3x.5^{-x} - 1} < 2$

4. Giải phương trình $4x^2 - 6^{\log_2 x} = 2.3^{\log_2 4x^2}$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{\log_2 x}{1+\log_2^2 x}+\dfrac{\log_2 y}{1+\log_2^2 y}=\dfrac{9}{10} \\ \left(1+\log_x 2.\log_y 2\right).\log_2(xy)=\dfrac{9}{2} \end{cases}$

Giải:

2/ Điều kiện: $-\dfrac{1}{2}\le x\le 3$. Bất phương trình tương đương với

$$\frac{5^x\sqrt{-2x^2+5x+3}+(3x-2)5^x+6x}{3x.-5^x}<2 \Leftrightarrow \frac{5^x\sqrt{(3-x)(2x+1)}+3x.5^x}{3x-5^x}<0 \quad (1)$$

Xét hàm số $g(x)=3x-5^x$, $g'(x)=3-5^x.\ln 5, g(x)=0 \Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{\ln 5}{3}\right)$.

Lập bảng biến thiên, ta thấy $g(x)\le g\left(\log_5\left(\dfrac{\ln 5}{3}\right)\right)<0$

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(3-x)(2x+1)}+3x>0$ (vì $5^x>0$) $\Leftrightarrow x>\dfrac{5-\sqrt{157}}{22}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $T=\left(\dfrac{5-\sqrt{157}}{22};3\right]$

4/ Điều kiện $x>0$

$$4x^2-6^{\log_2 x}=2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 2^{\log_2 4x^2}-6^{\log_2 x}=2.3^{\log_2 4x^2} \Leftrightarrow 2^{2\log_2 2x}-\frac{6^{1+\log_2 x}}{6}-2.3^{2\log_2 2x}=0$$

$$\Leftrightarrow 6.2^{2\log_2 2x}-6^{1+\log_2 x}-12.3^{2\log_2 2x}=0 \Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log_2 2x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 2x}-12=0\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 2x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$$

5/ Điều kiện: $0<x,y\ne 1$. Đặt $a=\log_2 x; b=\log_2 y$.

Khi đó, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{1+a^2}+\dfrac{b}{1+b^2}=\dfrac{9}{10} & (*) \\ \left(1+\dfrac{1}{ab}\right)(a+b)=\dfrac{9}{2} & (**) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10(a+b)(1+ab)=9\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) & (1) \\ 2(a+b)(1+ab)=9ab & (2) \end{cases}$$

Lấy phương trình (1) chia vế theo vế (2) ta được: $5ab=\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) \Leftrightarrow \dfrac{5a}{1+a^2}=\dfrac{1+b^2}{b}$ (3)

Từ (*), ta suy ra $\dfrac{a}{1+a^2}=\dfrac{9}{10}-\dfrac{b}{1+b^2}$.

Thay vào (3), ta có: $5\left(\dfrac{9}{10}-\dfrac{b}{1+b^2}\right)=\dfrac{1+b^2}{b} \Leftrightarrow \dfrac{1+b^2}{b}+5\dfrac{b}{1+b^2}-\dfrac{9}{2}=0$ (4)

Đặt $t=\dfrac{1+b^2}{b}$. Phương trình (4) trở thành: $t+\dfrac{5}{t}-\dfrac{9}{2}=0 \Leftrightarrow 2t^2-9t+10=0 \Leftrightarrow t=2; t=\dfrac{5}{2}$.

Với $t=2 \Rightarrow \left(b^2-2b+1\right)=0 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow y=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=4 \end{array}\right.$

Với $t=\frac{5}{2}\Rightarrow 2b^2-5b+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=2\Rightarrow y=4, x=2 \\ b=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\sqrt{2}, x=2\end{array}\right.$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(2;4);(2;\sqrt{2})\left(\sqrt{2};4\right),\left(4;2\right)$.

Đề số244. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8x^3y^3+27=18y^3(1)\\ 4x^2y+6x=y^2 \quad (2)\end{cases}$

Giải: Giải hệ phương trình: $\begin{cases}8x^3y^3+27=18y^3(1)\\ 4x^2y+6x=y^2 \quad (2)\end{cases}$

$(1)\Rightarrow y\neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}8x^3+\frac{27}{y^3}=18\\ \frac{4x^2}{y}+\frac{6x}{y^2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x)^3+\left(\frac{3}{y}\right)^3=18\\ 2x.\frac{3}{y}\left(2x+\frac{3}{y}\right)=3\end{cases}$

Đặt a = 2x; b = $\frac{3}{y}$. Ta có hệ: $\begin{cases}a^3+b^3=18\\ ab(a+b)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=1\end{cases}$

$\rightarrow$ Hệ đã cho có 2 nghiệm $\left(\frac{3-\sqrt{5}}{4};\frac{6}{3+\sqrt{5}}\right),\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4};\frac{6}{3-\sqrt{5}}\right)$

Đề số 245 . Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

Giải Giải phương trình: $2\log_5(3x-1)+1=\log_{\sqrt[3]{5}}(2x+1)$.

§iÒu kiÖn $x>\frac{1}{3}$. (*)

Víi ®k trªn, pt ®· cho $\Leftrightarrow\log_5(3x-1)^2+1=3\log_5(2x+1)$

$\Leftrightarrow\log_5 5(3x-1)^2=\log_5(2x+1)^3$

$\Leftrightarrow 5(3x-1)^2=(2x+1)^3$

$\Leftrightarrow 8x^3-33x^2+36x-4=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(8x-1)=0$ §èi chiÕu ®iÒu kiÖn (*), ta cã nghiÖm cña pt lµ $x=2$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=\frac{1}{8}\end{array}\right.$

Đề số 246 Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)(y-1)(x+y-2)=6\\ x^2+y^2-2x-2y-3=0\end{cases}$

Giải Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)(y-1)(x+y-2)=6\\ x^2+y^2-2x-2y-3=0\end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(y-1)(x-1+y-1)=6\\ (x-1)^2+(y-1)^2-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv(u+v)=6\\ u^2+v^2-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}uv(u+v)=6\\ (u+v)^2-2uv-5=0\end{cases}$ với $\begin{cases}u=x-1\\ v=y-1\end{cases}$

Đặt: $\begin{cases}S=u+v\\ P=u.v\end{cases}$ được $\begin{cases}P.S=6\\ S^2-2P-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ P=2\end{cases}$

u, v là nghiệm của phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-1=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1=1 \\ y-1=2 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ: (3 ; 2), (2 ; 3)

Đề số247.

3. Giải phương trình: $\log_3\left(x^2+x+1\right)-\log_3 x = 2x - x^2$

4. Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2)\log_2\sqrt{2x} \geq 0$

Giải

3. Giải phương trình: $\log_3\left(x^2+x+1\right)-\log_3 x = 2x - x^2$

$\Leftrightarrow \log_3\dfrac{x^2+x+1}{x} = x(2-x) \Leftrightarrow 3^{x(2-x)} = x+1+\dfrac{1}{x}$

Đặt:f(x)= $3^{x(2-x)}$ g(x)= $x+1+\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

Dùng pp kshs =>max f(x)=3; min g(x)=3=>PT f(x)= g(x) ⇔ max f(x)= min g(x)=3 tại x=1

=>PT có nghiệm x= 1

4/ Giải bất phương trình: $(\log_x 8 + \log_4 x^2)\log_2\sqrt{2x} \geq 0$

Điều kiện $x > 0$, $x \neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_8 x} + 2\log_4 x\right)\frac{1}{2}\log_2 2x \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\frac{1}{3}\log_2 x} + \log_2 x\right)(\log_2 x + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_2^2 x + 3)\left(\frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x + 1}{\log_2 x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \leq -1 \text{ hay } \log_2 x > 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ hay } x > 1$$

Đề số248 .

1/ Giải các phương trình

2. $\log_3(x^2+5x+6)+\log_3(x^2+9x+20) = 1+\log_3 8$

Giải:

+ Điều kiện : $\begin{cases} x^2+5x+6>0 \\ x^2+9x+20>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \vee x>-2 \\ x<-5 \vee x>-4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-5 \\ -4<x<-3 \\ x>-2 \end{array}\right.$, và có : $1+\log_3 8 = \log_3 24$

+ PT (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left[(x^2+5x+6)(x^2+9x+20)\right] = \log_3 24 \\ (x<-5) \vee (-4<x<-3) \vee (x>-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+5x+6)(x^2+9x+20) = 24 \\ (x<-5) \vee (-4<x<-3) \vee (x>-2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+3)(x+4)(x+5) = 24 \ (*) \\ (x<-5) \vee (-4<x<-3) \vee (x>-2) \ (**) \end{cases}$

+ Đặt $t = (x+3)(x+4) = x^2+7x+12 \Rightarrow (x+2)(x+5) = t-2$, PT (*) trở thành :

t(t-2) = 24 $\Leftrightarrow (t-1)^2 = 25 \Leftrightarrow t = 6 \vee t = -4$

- t = 6 : $x^2+7x+12=6 \Leftrightarrow x^2+7x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-6 \end{array}\right.$ (thỏa đk iện (**))
- t = - 4 : $x^2+7x+12=-4 \Leftrightarrow x^2+7x+16=0$: vô nghiệm

+ Kết luận : PT có hai nghiệm là x = -1 và x = - 6

Đề số 249. **1.**Giải phương trình $x^{\log_2 9} = x^2.3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

2. . Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

Giải:

1. Giải phương trình $x^{\log_2 9} = x^2.3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$

ĐK: x>0.

Ta có phương trình $x^{\log_2 9} = x^2.3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1$. Đặt $\log_2 x \Rightarrow x = 2^t$.

Phương trình trở thành $3^t = 4^t - 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^t + \left(\dfrac{1}{4}\right)^t = 1 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \boxed{x=2}$

2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=3 \end{cases}$

ĐK: $x + y \neq 0$

Ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+y)^2+(x-y)^2+\dfrac{3}{(x+y)^2}=7 \\ x+y+\dfrac{1}{x+y}+x-y=3 \end{cases}$

Đặt $u = x+y+\dfrac{1}{x+y}$ ($|u| \geq 2$) ; v = x – y ta được hệ : $\begin{cases} 3u^2+v^2=13 \\ u+v=3 \end{cases}$

Giải hệ ta được u = 2, v = 1 do ($|u| \geq 2$)

Từ đó giải hệ $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x+y}=2 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

Đề số250.

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1} \end{cases}$

PT $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\geq 0 \\ 3x^2+1+xy=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x(3x+y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -1 \\ x=0 \vee y=1-3x \end{cases}$

Với x = 0 thay vào (1) : $2+2^{y-2}=3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y=12.2^y \Leftrightarrow 2^y=\dfrac{8}{11} \Leftrightarrow y=\log_2\dfrac{8}{11}$

Với $\begin{cases} x\geq -1 \\ y=1-3x \end{cases}$ thay y = 1 – 3x vào (1) ta được : $2^{3x+1}+2^{-3x-1}=3.2\,(3)$

Đặt $t=2^{3x+1}$, vì $x\ge -1$ nên $t\ge -\frac{1}{4}$

PT (3) : $t+\frac{1}{t}=6\Leftrightarrow t^2-6t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3-2\sqrt{2}\\ t=3+2\sqrt{2}\end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $t\ge -\frac{1}{4}$ ta chọn $t=3+2\sqrt{2}$.

Khi đó $2^{3x+1}=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-1\right]$

$y=1-3x=2-\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)$

Vậy HPT đã cho có 2 nghiệm $\begin{cases} x=0\\ y=\log_2\frac{8}{11}\end{cases}$ và $\begin{cases} x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-1\right]\\ y=2-\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)\end{cases}$

Đề số 251. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13\\ (x+y)(x^2-y^2)=25\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Giải:

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13\\ (x+y)(x^2-y^2)=25\end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

$\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13 & (1)\\ (x+y)(x^2-y^2)=25 & (2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+xy^2-x^2y-y^3=13 & (1')\\ y^3-xy^2+x^2y-x^3=25 & (2')\end{cases}$

Lấy (2') - (1') ta có: $x^2y-xy^2=6\Leftrightarrow (x-y)xy=6$ (3)

Kết hợp với 1 ta có $\begin{cases}(x-y)(x^2+y^2)=13\\ (x-y)xy=6\end{cases}$ (I). Đặt y = - z ta có :

$(I)\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)(x^2+z^2)=13\\ -(x+z)xz=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)\left[(x+z)^2-2xz\right]=13\\ (x+z)xz=-6\end{cases}$

Đặt S = x +z và P = xz ta có :

$\begin{cases}S(S^2-2P)=13\\ SP=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^3-2SP=13\\ SP=-6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=1\\ P=-6\end{cases}$

Ta cã : $\begin{cases}x+z=1\\ x.z=-6\end{cases}$. Hệ này có nghiệm $\begin{cases}x=3\\ z=-2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=-2\\ z=3\end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm là: (3 ; 2) vµ (-2 ; -3)

Đề số252 . Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x-4))\le 1$

Giải:

Giải bất phương trình: $\log_x(\log_4(2^x-4))\le 1$

$\log_x(\log_4(2^x-4))\le 1$. Đk: $\begin{cases}0<x\neq 1\\ \log_4(2^x-4)>0\Leftrightarrow x>\log_2 5\\ 2^x-4>0\end{cases}$

Do $x>1\Rightarrow$ PT $\Leftrightarrow \log_4(2^x-4)\le x\Leftrightarrow 2^x-4\le 4^x\Leftrightarrow 4^x-2^x+4\ge 0$ đúng với mọi x. Do vậy BPT có nghiệm: $x>\log_2 5$

Đề số 253.

2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$

5. Giải hệ phương trình $\begin{cases}\log_{2010}\dfrac{2(x-1)}{y}=y+x\\ \sqrt{y^2-x^2+2}=\sqrt{x-3y}\end{cases}$

Giải:

2: Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2+35}<5x-4+\sqrt{x^2+24}$

BPT tương đương

$$\sqrt{x^2+35}-\sqrt{x^2+24}<5x-4\Leftrightarrow \frac{11}{\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24}}<5x-4$$

$$\Leftrightarrow 11<(5x-4)(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})$$

Xét:

a)Nếu $x\le\dfrac{4}{5}$ không thỏa mãn BPT

b)Nếu x>4/5: Hàm số $y=(5x-4)(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})$ với x>4/5

$y'=5(\sqrt{x^2+35}+\sqrt{x^2+24})+(5x-4)(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+35}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+24}})>0$ mọi x>4/5

Vậy HSĐB. +Nếu $4/5<x\le 1$ thì $y(x)\le 11$
+Nếu x>1 thì y(x)>11 Vậy nghiệm BPT x>1

Đề số254. Giải phương trình: $3^{x^2}2^{\frac{x}{2x-1}}=6$

Giải: Giải phương trình: $3^{x^2}2^{\frac{x}{2x-1}}=6$

Lấy logarit theo cơ số 3 cho hai vế ta được: $x^2+\dfrac{x}{2x-1}\log_3 2=1+\log_3 2$

Đưa phương trình về dạng: $(x-1)(2x^2+x-1-\log_3^2)=0$.

Từ đó suy ra nghiệm $x=1$; $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9+8\log_3 2}}{4}$

Đề số255. .Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x-\log_2 x^2-3}>\sqrt{5}(\log_4 x^2-3)$

Giải: Giải bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x-\log_2 x^2-3}>\sqrt{5}(\log_4 x^2-3)$

ĐK: $\begin{cases}x>0\\ \log_2^2 x-\log_2 x^2-3\ge 0\end{cases}$

Bất phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{\log_2^2 x-\log_2 x^2-3}>\sqrt{5}(\log_2 x-3)$ (1)

đặt $t = \log_2 x$, BPT (1) $\Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 2t - 3} > \sqrt{5}(t-3) \Leftrightarrow \sqrt{(t-3)(t+1)} > \sqrt{5}(t-3)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ \begin{cases} t > 3 \\ (t+1)(t-3) > 5(t-3)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \le -1 \\ 3 < t < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \le -1 \\ 3 < \log_2 x < 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ 8 < x < 16 \end{array}\right.$$

Vậy BPT đã cho có tập nghiệm là: $(0;\frac{1}{2}] \cup (8;16)$

Đề số 256

2,Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2) + \log_{2+y}(x^2-2x+1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

4,Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2 4x$.

Giải 2,Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy-2x+y+2) + \log_{2+y}(x^2-2x+1) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

§K $\begin{cases} -4 < x < 1, x \ne 0 \\ y > -2; y \ne -1 \end{cases}$

Đưa phương trình thứ nhất của hệ về dạng : $\log_{1-x}(2+y) + \log_{2+y}(1-x) = 2$

Đặt $t = \log_{1-x}(2+y)$, tìm được T=1 kết hợp với phương trình thứ 2 của hệ, đối chiếu với điều kiện trên, tìm được nghiệm : $(x;y) = (-2;1)$

4Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2 4x$.

ĐK x > 0 và $x \ne 1$. Đưa phương trình về dạng : $\log_2(x+3) + \log_2|x-1| = \log_2(4x)$.

Xét hai khả năng 0<X<1 và X>1, đối chiếu với điều kiện ta tìm được nghiệm của phương trình là $x = -3 + 2\sqrt{3}$ và x = 3.

Đề số 257. Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$.

Giải Giải phương trình: $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$.

$\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = 3\log_8(4x)$.

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > -3 \\ x \ne 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \ne 1.$$

Biến đổi theo logarit cơ số 2 thành phương trình

$$\log_2\left[(x+3)(x-1)\right] = \log_2(4x) \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \ (\text{loại}) \\ x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 3.$$

Đề số 258.

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$

Giải:

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \\ 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \end{cases}$

điều kiện x>0, y>0. Khi đó hệ tương đương $\begin{cases} 3x^2y = y^2+2 \\ 3xy^2 = x^2+2 \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình ta được: (x-y)(3xy+x+y) = 0 $\Leftrightarrow x = y$ thay lại phương trình Giải tìm được nghiệm của hệ là: (1;1).

2. Giải phương trình: $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}=0$

Tập xác định: D = R. Đặt f(x) = $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{2x+2}+\sqrt[3]{2x+3}$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+2)^2}}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{(2x+3)^2}}>0; \forall x \neq -\dfrac{1}{2},-1,-\dfrac{3}{2}$

Suy ra hàm số f(x) đồng biến trên tập M=$\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},-1\right)\cup\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

Ta thấy f(-1)=0 $\Rightarrow$ x=-1 là một nghiệm của (1). Ta có: $f(-\dfrac{1}{2})=3;\ f(-\dfrac{3}{2})=-3$

Ta có bảng biến thiên của hàm số f(x):

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
f'(x)		||	||	||	
F(x)	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$ (↗)

Từ bảng biến thiên ta thấy f(x) = 0 $\Leftrightarrow$ x = -1. Vậy phương trình đã cho có duy nhất một nghiệm x = -1.

Cách 2: Học sinh có thể đặt $\begin{cases} u=\sqrt[3]{2x+1} \\ v=\sqrt[3]{2x+3} \end{cases}$ khi đó ta được hệ $\begin{cases} u+v+\dfrac{u^3+v^3}{2}=0 \\ v^3-u^3=2 \end{cases}$

giải hệ này và tìm được nghiệm.

Đề số 259. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}(1+\dfrac{1}{y})=4 \\ \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases}$.

Giải

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}(1+\dfrac{1}{y})=4 \\ \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases}$.

§k $y\neq 0$ $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}(1+\dfrac{1}{y})=4 \\ \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4-x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+x+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^3+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{x}{y}(\dfrac{1}{y}+x)=4 \end{cases}$ ®Æt $\begin{cases} a=x+\dfrac{1}{y} \\ b=\dfrac{x}{y} \end{cases}$

Ta ®-îc $\begin{cases} a^2+a-2b=4 \\ a^3-2ab=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-4=2b \\ a^3-a(a^2+a-4)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+a-4=2b \\ a^2-4a+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

Đề số 260.

2. Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ $(x\in R)$

4. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=1+\log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2}=81 \end{cases}$ $(x,\ y\in R)$

Giải

2.Giải phương trình : $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ $(x\in R)$

$2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$, ñieàu kieän : $6-5x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \dfrac{6}{5}$

Ñaët $t=\sqrt[3]{3x-2} \Leftrightarrow t^3=3x-2 \Leftrightarrow x=\dfrac{t^3+2}{3}$ vaø $6-5x=\dfrac{8-5t^3}{3}$

Phöông trình trôû thaønh : $2t+3\sqrt{\dfrac{8-5t^3}{3}}-8=0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{\dfrac{8-5t^3}{3}}=8-2t \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 4 \\ 15t^3+4t^2-32t+40=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ t = -2. Vaäy x = -2

4. Gæai heä phöông trình : $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=1+\log_2(xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2}=81 \end{cases}$ $(x,\ y\in R)$

Ñieàu kieän x, y > 0

$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=\log_2 2+\log_2(xy)=\log_2(2xy) \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ xy=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

....